

Universidade de São Paulo  
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas  
Departamento de Astronomia

Rodrigo Alvares de Souza

**Existência de matéria de quarks fria na  
Natureza: Modelos e Observações**

São Paulo

2016



Rodrigo Alvares de Souza

# Existência de matéria de quarks fria na Natureza: Modelos e Observações

Tese apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Versão Corrigida. O original encontra-se disponível na Unidade.

Área de Concentração: Astronomia

Orientador: Prof. Dr. Jorge Ernesto Horvath

São Paulo

2016



*Dedico este trabalho à minha mãe Rosângela Juanes Sevilla, guerreira incansável, e aos meus avós Angel Juanes Sevilla (in memoriam) e Rosa Chiquetto Sevilla.*



# Agradecimentos

Desafio tão grande quanto escrever esta tese é utilizar apenas duas páginas para agradecer as pessoas que fizeram parte desta trajetória em todos estes anos.

Inicio então agradecendo à luz da minha vida, minha filha Manuella, simplesmente por fazer parte de tudo isso iluminando o meu caminho e enchendo meu coração de alegria.

À minha mãe Rosângela Juanes Sevilla, por todo amor e carinho que nunca me faltaram.

Aos meus avós Angel Juanes Sevilla (in memoriam) e Rosa Chiquetto Sevilla, pois devo a eles tudo o que sou hoje.

Ao orientador que considero um grande amigo, Prof. Dr. Jorge Ernesto Horvath, por ter dedicado de maneira brilhante seu conhecimento nos mais diversos assuntos não apenas em meu trabalho de graduação e doutorado, mas em minha formação acadêmica como um todo. Sou muito grato pelas discussões acaloradas e trocas de experiência, pela atenção, pelas diretrizes e orientações que me permitiram a execução do trabalho. Se um dia conseguir contribuir da mesma maneira tanto cientificamente como na formação de outras pessoas, saberei estar trilhando o caminho certo. Meu sincero obrigado.

À minha relatora Prof.Dra. Elizabete M.G. Dal Pino pelas sugestões e trocas de experiências.

Ao grande e querido amigo Márcio G.B. de Avellar pelas conversas (científicas e não científicas), por aturar minhas reclamações e me aconselhar em momentos em que eu queria jogar a toalha. Agradeço também toda a boa vontade na valiosa ajuda que sempre me deu para resolver os problemas que pareciam insolúveis.

Aos amigos do IAG, em especial ao Felipe Oliveira, Andrés e Camille.

Ao pessoal do Grupo de Hádrons e Física Teórica (GRHAFITE) do IFUSP, e em especial ao Dr. David Augaitis Fogaça por toda a força e ajuda para resolver os problemas

de QCD, mas principalmente a boa vontade, algo mais raro que um monopolo magnético nos dias de hoje.

Ao Prof. Dr. Bruno Mintz do Depto. de Física Teórica da UERJ, pela colaboração e ajuda na resolução de vários problemas, e à Dra. Rosana de Oliveira Gomes da UFRGS pela ajuda vital nos cálculos efetuados nesta tese.

Ao pessoal do T80-Sul, destacando a Prof. Dra. Claudia Mendes de Oliveira, pela oportunidade de trabalhar no projeto.

Aos funcionários do IAG, por toda a assistência prestada.

Aos grandes professores que tive, em especial: Prof. Mazé Bechara, Prof. Adilson José da Silva, Prof. Fernando Silveira Navarra, Prof. Fernando Mori, Prof. Venâncio Barbieri e Prof. Péter Almay, e aos professores com quem tive oportunidade de ter aulas no IAG.

Aos grandes gênios que sempre me inspiraram, em especial Ken Thompson, Brian Kernighan e Dennis Ritchie e a toda a comunidade de código livre do Brasil e do mundo pela criação e manutenção dos programas que tornaram este trabalho possível, em particular à GNU Software Foundation.

Ao Departamento de Astronomia (IAG-USP), por propiciar um ótimo ambiente de trabalho e pesquisa.

A todos aqueles que, de certa forma, me apoiaram neste trabalho.

E principalmente aos que não acreditaram em mim ou dificultaram as coisas (que foram muitos em todos estes anos) – estes sempre me deram força para progredir.

**Agradecimento especial:** Meu agradecimento mais profundo só poderia ser dedicado a uma pessoa: minha esposa. O tempo todo ao meu lado, incondicionalmente, aguentando meu mau humor ultra-relativístico e minha paciência próxima ao zero absoluto. Nos momentos mais difíceis, que não foram raros nestes anos, sempre me fazendo acreditar que chegaria ao final desta difícil, e aparentemente impossível etapa. Este período nos mostrou a verdade sobre nosso relacionamento: somos uma família! Sou grato por cada gesto carinhoso, cada sorriso, e ansioso por estar ao seu lado, com nossa gatinha, o resto da minha vida. Obrigado Ana Paula, meu amor infinito.



*“Toda sentença proferida por mim deve ser entendida não como uma afirmação, mas como um questionamento.”*

Niels Bohr (1885 - 1962)

*“Existem duas maneiras de viver: você pode viver como se nada fosse um milagre, e pode viver como se tudo fosse um milagre.”*

Albert Einstein (1879-1955)

*“Mais do que amor, do que dinheiro, do que fé, do que fama, do que justiça, dêem-me a verdade.”*

Henry David Thoreau (1817 - 1862)



# Resumo

O objetivo deste trabalho é o estudo da matéria de quarks fria em estrelas de nêutrons, a partir de transições de fase da matéria hadrônica para matéria de quarks.

Neste trabalho, após serem apresentados aspectos importantes de evolução estelar e teoria das estrelas de nêutrons, foi feita uma revisão dos modelos para cálculo da estrutura das estrelas em regime relativístico: o modelo canônico das equações de Tolman–Oppenheimer–Volkoff e o ‘novo paradigma’ do modelo de Einstein–Maxwell–Fermi, onde conclui-se que o modelo de Einstein–Maxwell–Fermi possui algumas inconsistências, entre elas a inadequação do modelo para o tratamento de estrelas com equação de estado híbrida e o fato de usar como ponto de partida o modelo atômico, que já apresenta intrinsecamente a propriedade de não-neutralidade local.

Para descrever a fase hadrônica neste trabalho foi estudado o modelo SWRDP, que considera a presença de híperons e os efeitos de forças de muitos corpos simuladas pelo auto-acoplamento não linear e as contribuições méson-méson. A matéria de quarks foi descrita através de duas abordagens: a *Teoria de Campo Médio da QCD* (MFTQCD) e a *Extensão Infravermelha da QCD* (QCDIRE).

A abordagem utilizada para fazer a ligação entre a matéria hadrônica e a matéria de quarks fria foi uma transição de fase de primeira ordem utilizando a construção de Maxwell. Para a combinação SWRDP+MFTQCD, a transição de fase foi possível, pois para algumas combinações de parâmetros ajustáveis de ambas as equações as condições para a transformação de Maxwell foram satisfeitas. Para a combinação SWRDP+QCDIRE, não foi possível obter a equação de estado híbrida.

Em seguida as equações de estado híbridas foram integradas utilizando as equações de Tolman–Oppenheimer–Volkoff, e obtidas massas máximas para alguns conjuntos de

parâmetros que estão em acordo com observações dos pulsares PSR J1614–2230 ( $M = 1.97 \pm 0.04 M_{\odot}$ ) e PSR J0348+0432 ( $M = 2.01 \pm 0.04 M_{\odot}$ ). Pela análise dos parâmetros, conclui-se que, nas equações de estado híbridas utilizadas, as que apresentaram matéria hadrônica mais dura e caroço de quarks menos duros (dentro do espaço de parâmetros) foram que as que alcançaram massas maiores.

Com relação ao modelo QCDIRE, a equação de estado não permite nenhuma transição de estado como o modelo hadrônico utilizado e não permite massas maiores que  $0.66 M_{\odot}$ . Isso pode se dever ao fato de não haver nenhuma interação introduzida *ad hoc* no modelo, mas também indica que levar em conta o confinamento não garante equações de estado aplicáveis para situações realistas.

Neste trabalho também são apresentados alguns resultados com relação à entropia das estrelas de nêutrons, e em seguida utilizou-se a teoria da informação para avaliar a preferência das diferentes equações de estado pela Natureza. Concluiu-se que modelos com núcleos de quark onde a matéria de quarks fria é caracterizada pela baixa interação entre os glúons com maior momento e os quarks, combinados com equações de estado hadrônicas mais duras são mais prováveis de ocorrerem na Natureza pela ótica da teoria da informação.

E por fim, são apresentados os estudos referentes ao estudo do modelo de *unparticles* e os resultados obtidos do modelo com relação às estrelas *Procyon B* e *Stein 2051B*. Também é apresentado o procedimento utilizado para obter a massa do propagador do modelo utilizando o limite de Chandrasekhar para anãs brancas.

# Abstract

The main goal of this work is the study of cold quark matter in neutron stars from phase transitions of hadronic matter to quark matter. In this work, after presenting important aspects of stellar evolution and the theory of neutron stars, we review two frameworks designed to calculate the structure of the stars in the relativistic regime: the canonical Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations and the so called ‘new paradigm’ Einstein-Maxwell-Fermi, where we conclude that the Einstein-Maxwell-Fermi model has some inconsistencies, being inadequate for the treatment of stars with hybrid equation of state, and the fact that using the atomic model as a starting point already has the property of the local non-neutrality as a built-in feature.

To describe the hadronic phase in this work we studied the SWRDP model, which considers hyperons and the effects of many-body forces simulated by the nonlinear self-coupling and the meson-meson contributions. The matter of quarks was described by two approaches: the QCD Mean Field Theory (MFTQCD) and QCD Infrared Extension (QCDIRE). The approach used to make the connection between hadronic matter and the cold quark matter was a first order phase transition using the Maxwell construction. For the SWRDP+MFTQCD combination, the phase transition is possible, since both conditions for the Maxwell construction were met for a set of parameters. For the SWRDP+QCDIRE combination, it was not possible to obtain a hybrid equation of state. Next, the hybrid state equations were integrated using the Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations and obtained maximum masses for some sets of parameters that are in agreement with observations of pulsars PSR J1614-2230 ( $M = 1.97 \pm 0.04 M_{\odot}$ ) and PSR J0348+0432 ( $M = 2.01 \pm 0.04 M_{\odot}$ ). Regarding the parameters, we conclude that only the equations of state which present stiff hadronic matter and soft quark cores (within the parameter

space) are able to generate maximum masses high enough to agree with observations. Regarding the QCDIRE model, the equation of state does not allow phase transitions given the hadronic model used, and also does not allow masses larger than  $0.66M_{\odot}$ .

This may be due to the fact that there is no *ad hoc* interactions in the model, but also indicates that accounting for confinement does not guarantee applicable equations of state in realistic situations.

In this work we present some results regarding the entropy of the neutron stars, followed by a introduction to information theory, which we used to evaluate the preference of different equations of state by Nature. We concluded that models with quark cores where the cold quark matter is characterized by low interaction between hard gluons and quarks, combined with stiffer hadronic state equations are more likely to occur in Nature from the perspective of information theory.

Finally, we show the studies about the *unparticles* model and the results with respect to the stars *Procyon B* and *Stein 2051B*, along with the procedure we used to obtain the mass of the propagator of the theory using the Chandrasekhar limit for white dwarfs.

## Lista de Abreviaturas e Siglas

- BPS : Baym-Pethick-Sutherland
- CQM : Cold Quark Matter
- EMF : Einstein-Maxwell-Fermi
- HDQ : Hadrodinâmica Quântica
- MFTQCD : Mean Field Theory of QCD
- MIT : Massachusetts Institute of Technology
- QCD : Quantum Chromodynamics
- QCDIRE : QCD Infrared Extension
- QGP : Quark Gluon Plasma
- SWRDP : Sigma-Omega-Rho-Delta-Phi
- TF : Thomas-Fermi
- TOV : Tolman–Oppenheimer–Volkoff
- ZM : Zimanyi e Moszkowski





# Lista de Figuras

2.1	Esquema de evolução estelar, para massas diferentes . . . . .	34
2.2	Estrutura geral de uma anã branca(Imagem obtida de BotRejectsInc (2016)).	37
2.3	Nebulosa do Caranguejo vista através de diferentes comprimentos de onda.	43
2.4	Ilustração esquemática do interior de uma estrela de nêutrons. . . . .	46
2.5	Massas medidas e estimadas de estrelas de nêutrons em pulsares e acretantes de raio-x binárias em rádio . . . . .	47
2.6	Diagrama massa-raio para estrelas de nêutrons. . . . .	48
2.7	Topologias para o diagrama massa-raio de estrelas híbridas. . . . .	48
3.1	Densidade numérica de prótons, nêutrons e elétrons para uma configuração em unidades de densidade nuclear $n_{\text{nuc}} \simeq 0.16 \text{ fm}^{-3}$ . . . . .	62
4.1	Equação de estado BPS e do gás de Fermi do sistema (n,p,e) em equilíbrio $\beta$ .	74
4.2	Equação de estado SWRDP para matéria estelar e diferentes parametrizações de $\zeta$ . . . . .	84
4.3	Relação massa-raio para estrelas utilizando o modelo SWRDP para diferen- tes parâmetros $\zeta$ . . . . .	85
6.1	Diagrama de fases da QCD. . . . .	103
6.2	Exemplo de equação de estado híbrida onde são aplicados os critérios de Maxwell(linha contínua) e de Gibbs (linha pontilhada). . . . .	105
6.3	Equação de estado híbrida $\varepsilon(p)$ para matéria densa. . . . .	106
7.1	Valores de $\xi = g/m_G$ como função de $B_{QCD}$ para diferentes valores da energia por bárion . . . . .	109

7.2	Diferentes parametrizações da equação de estado MFTQCD. . . . .	109
7.3	Contribuições individuais à densidade de energia e a pressão da MFTQCD.	110
7.4	Sensibilidade da equação de estado MFTQCD à variação de parâmetros. .	111
7.5	Equações de estado SWRDP( $\zeta = 0.040$ ) + MFTQCD( $B_{QCD} = 90 \text{ MeV fm}^{-3}$ )	113
7.6	Equações de estado SWRDP( $\zeta = 0.049$ ) + MFTQCD( $B_{QCD} = 90 \text{ MeV fm}^{-3}$ )	114
7.7	Equações de estado SWRDP( $\zeta = 0.059$ ) + MFTQCD( $B_{QCD} = 90 \text{ MeV fm}^{-3}$ )	115
7.8	Equações de estado SWRDP( $\zeta = 0.071$ ) + MFTQCD( $B_{QCD} = 90 \text{ MeV fm}^{-3}$ )	116
7.9	Equações de estado SWRDP( $\zeta = 0.085$ ) + MFTQCD( $B_{QCD} = 90 \text{ MeV fm}^{-3}$ )	117
7.10	Equação de estado BPS+SWRDP+MFTQCD, para parâmetros $\zeta = 0.040$ (a) e $\zeta = 0.049$ (b). . . . .	119
7.11	Equação de estado BPS+SWRDP+MFTQCD, para parâmetros $\zeta = 0.059$ (a) e $\zeta = 0.071$ (b). . . . .	120
7.12	Equação de estado BPS+SWRDP+MFTQCD, para parâmetro $\zeta = 0.085$ . .	121
7.13	Diagrama massa-raio para estrelas híbridas no modelo BPS+SWRDP+MFTQCD, para parâmetros $\zeta = 0.040$ (a) e $\zeta = 0.049$ (b). . . . .	122
7.14	Diagrama massa-raio para estrelas híbridas no modelo BPS+SWRDP+MFTQCD, para parâmetros $\zeta = 0.059$ (a) e $\zeta = 0.071$ (b). . . . .	123
7.15	Diagrama massa-raio para estrelas híbridas no modelo BPS+SWRDP+MFTQCD, para parâmetro $\zeta = 0.085$ . . . . .	124
7.16	Equação de estado QCDIRE. . . . .	127
7.17	Equação de estado SWRDP e QCDIRE. . . . .	127
7.18	Relação massa-raio com a equação de estado QCDIRE. . . . .	128
8.1	Definição intuitiva de complexidade. . . . .	134
8.2	Diagrama de entropia, desequilíbrio e complexidade para estrelas híbridas no modelo BPS+SWRDP+MFTQCD, para parâmetros $\zeta = 0.040$ (a) e $\zeta =$ $0.049$ (b). . . . .	137
8.3	Diagrama de entropia, desequilíbrio e complexidade para estrelas híbridas no modelo BPS+SWRDP+MFTQCD, para parâmetros $\zeta = 0.059$ (a) e $\zeta =$ $0.071$ (b). . . . .	138
8.4	Diagrama de entropia, desequilíbrio e complexidade para estrelas híbridas no modelo BPS+SWRDP+MFTQCD, para parâmetro $\zeta = 0.085$ . . . . .	139

8.5	Diagrama de entropia, desequilíbrio e complexidade para estrelas híbridas no modelo BPS+SWRDP+MFTQCD, para parâmetro $\xi = 0.00040$ . . . . .	140
9.1	Solução numérica da equação de Lane-Emden para $n=3$ . . . . .	145
9.2	Diferença encontrada entre a massa medida e a massa calculada a partir do raio para a estrela <i>Procyon B</i> . . . . .	153
9.3	Diferença encontrada entre a massa medida e a massa calculada a partir do raio para a estrela <i>Stein 2051B</i> . . . . .	154
9.4	Sobreposição dos gráficos das Figs. 9.2 e 9.3 . . . . .	154
9.5	Relação massa-raio a partir dos dados do Hipparcos, para estrelas anãs brancas. . . . .	155
9.6	Raios, em $R_{\odot}$ para as estrelas EG50 e GD140 utilizando a relação Massa-Raio perturbada. . . . .	156
A.1	Fase mista para uma transição com duas cargas conservadas . . . . .	182
A.2	Diagrama esquemático da pasta nuclear na fase hadrônica. . . . .	184
A.3	Pasta nuclear na transição quark-hadron . . . . .	184
B.1	Variação de $D_U$ para $n=3/2$ . . . . .	188
B.2	Variação de $\xi_G$ para $n=3/2$ . . . . .	189



# Lista de Tabelas

2.1	Comparação entre as propriedades do Sol com diferentes objetos estelares compactos. . . . .	41
4.1	Coefficientes da Fórmula de Weizsacker. . . . .	69
4.2	Características das partículas presentes no modelo de Walecka. . . . .	75
4.3	Propriedades dos bárions e léptons. . . . .	80
4.4	Campos mesônicos considerados no modelo SWRDP. . . . .	80
7.1	Massas máximas das estrelas no modelo BPS+SWRDP+MFTQCD . . . . .	125
9.1	Valores de massa e raio para as estrelas <i>Procyon B</i> e <i>Stein 2051B</i> . . . . .	151
9.2	Massas obtidas para <i>Procyon B</i> , variando o parâmetro $D_U$ . . . . .	152
9.3	Massas obtidas para <i>Stein 2051B</i> , variando o parâmetro $D_U$ . . . . .	152
B.1	Valores de $\xi_1$ , ou seja, o valor onde a curva intercepta o eixo $\xi$ , que fornece o raio na superfície da estrela, bem como sua temperatura e pressão, para um polítropo perturbado com $n=3/2$ e parâmetro $\xi = 0.1$ e $D_U$ variando de 0.5 a 1.5 . . . . .	189
B.2	Soluções para a equação de Lane-Emden perturbada com $n = 3/2$ , com os valores de $\xi_*$ e $\theta(\xi_*)$ , com o parâmetro fixo $\xi_G = 1$ e $D_U$ variando de 0.5 a 1.5	190



# Sumário

1. <i>Introdução</i> . . . . .	25
2. <i>Evolução Estelar e Estrelas de Nêutrons</i> . . . . .	31
2.1 Características gerais . . . . .	31
2.1.1 Formação e Vida na sequência Principal . . . . .	32
2.1.2 Estágios Finais de Evolução Estelar . . . . .	35
2.2 Mais a Respeito das Estrelas de Nêutrons . . . . .	42
2.2.1 Composição . . . . .	43
2.2.2 Equação de Estado . . . . .	44
2.2.3 Estrutura . . . . .	44
2.2.4 Diagrama Massa-Raio . . . . .	45
3. <i>Relatividade Geral e Estrutura Estelar</i> . . . . .	49
3.1 Relatividade Geral . . . . .	49
3.2 Equilíbrio hidrostático e equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff . . . . .	52
3.3 Construção de Einstein-Maxwell-Fermi . . . . .	54
3.4 Análise das diferentes abordagens . . . . .	63
4. <i>Hadrodinâmica Quântica</i> . . . . .	65
4.1 Propriedades de matéria nuclear . . . . .	66
4.2 Equações de Estado . . . . .	71
4.2.1 Modelo do gás de Fermi . . . . .	72
4.2.2 Modelo $\sigma - \omega$ de Walecka . . . . .	73
4.2.3 Modelo ZM . . . . .	76

4.2.4	Modelo $\sigma - \omega - \rho - \delta - \phi$ (SWRDP)	78
4.2.5	Equação de Estado de Baym-Pethick-Sutherland (BPS)	85
5.	<i>Matéria de Quarks Fria</i>	89
5.1	Definição da Matéria de Quarks Fria	90
5.2	Modelos Efetivos para Matéria de Quarks	91
5.2.1	Lattice QCD	91
5.2.2	Modelos de sacola	92
5.3	<i>Mean Field Theory of QCD</i>	93
5.4	<i>QCD InfraRed Extension</i>	96
6.	<i>Transições de fase Hádrons <math>\rightarrow</math> CQM</i>	101
6.1	Fases da QCD	101
6.2	Termodinâmica da transição de fase	104
7.	<i>CQM em estrelas de Nêutrons: Modelos e Observações</i>	107
7.1	Modelo híbrido SWRDP + MFTQCD	107
7.1.1	Intervalo de validade para o modelo MFTQCD	108
7.1.2	Equação de estado	112
7.1.3	Modelos Estelares - Diagrama Massa-Raio	121
7.2	Modelo QCDIRE	126
7.2.1	Modelos Estelares - Diagrama Massa-Raio	126
8.	<i>Entropia e Teoria da Informação</i>	129
8.1	Evolução da Entropia nas Estrelas de Nêutrons	129
8.1.1	Entropia nas Estrelas de Nêutrons	130
8.2	Teoria da Informação	131
8.3	Entropia de Informação dos Modelos Híbridos	135
9.	<i>Estudos Complementares</i>	141
9.1	Polítropos	141
9.1.1	Definição de Polítropos e aplicações	141
9.1.2	A física dos interiores estelares	142
9.1.3	Breve dedução da equação de Lane-Emden	143



9.1.4	Soluções da Equação de Lane-Emden . . . . .	145
9.1.5	Relação Massa - Raio . . . . .	145
9.1.6	O parâmetro K . . . . .	146
9.2	Unparticles . . . . .	147
9.2.1	Motivação . . . . .	147
9.2.2	A teoria . . . . .	147
9.2.3	Implicações no Potencial Newtoniano . . . . .	150
9.3	Relação Massa - Raio para o modelo perturbado - Soluções numéricas . . .	151
9.4	A massa do propagador das <i>unparticles</i> . . . . .	156
10.	Conclusões . . . . .	159
10.1	Perspectivas Futuras . . . . .	162
	Referências . . . . .	163
	Apêndice . . . . .	177
A.	Transições de fase contínuas . . . . .	179
B.	Equação de Lane-Emden Perturbada . . . . .	187
B.1	Dedução da equação de Lane-Emden perturbada . . . . .	187
B.2	Soluções numéricas para o modelo de <i>unparticles</i> . . . . .	187
C.	Artigos Publicados . . . . .	191
D.	Fontes de Programas . . . . .	227
D.1	tovsolver . . . . .	227
D.2	eos.maxwell.construction . . . . .	273



## Introdução

The stars are indifferent to astronomy  
And all that we think we know  
Mars will salute your autonomy  
But he doesn't need to know

---

Nada Surf

Por quase toda a história da humanidade, acreditou-se que o átomo seria a estrutura mais fundamental da natureza, tanto que o nome vem do grego e significa “indivisível”. Um pensamento recorrente da ciência é que, a partir de uma descrição do átomo, todo o mundo, e posteriormente o Universo, poderiam ser descritos a partir desta teoria fundamental. Porém, conforme a ciência em geral e a física em particular foram progredindo, constatou-se que o átomo possui uma estrutura microscópica, caindo por terra a idéia de indivisibilidade: o núcleo do átomo apresentaria uma estrutura ainda mais fundamental, os prótons e nêutrons. Estas descobertas ocorreram graças aos grandes experimentos sobre reações nucleares ao longo da história, onde a energia empregada nos mesmos foi aumentando ano a ano. Nas décadas seguintes, com a construção dos grandes aceleradores de partículas, com a capacidade de gerar feixes de partículas no regime de altas energias, novos estados da matéria foram descobertos. O estudo destes estados, gerados sob condições extremas de temperatura e densidades, é considerado um dos grandes desafios da física atual e nesse contexto surge a interdisciplinaridade entre a física de partículas, a astrofísica e a física nuclear.

Um das maneiras de investigar as propriedades da matéria sob condições físicas extremas é estudar o interior de objetos super densos (Weber, 1999), como estrelas de nêutrons, que funcionam como laboratórios naturais no universo. A determinação da equação de

estado - relação entre pressão, densidade de energia e temperatura - no interior de estrelas compactas é fundamental para entender as propriedades da matéria em altas densidades, em um regime inatingível nos laboratórios terrestres.

Estrelas de nêutrons vem em diversas classificações: podem ser constituídas inteiramente por matéria hadrônica e ter sua descrição baseada em modelos com graus de liberdade hadrônicos. Temos também as estrelas de quarks, objetos altamente compactos, onde os hádrons desconfinaram em quarks, cuja equação de estado deve ser deduzida a partir da teoria dos quarks e glúons e suas interações, a cromodinâmica quântica ou QCD. Há também os modelos de estrelas híbridas, foco principal desta tese, cujo núcleo, composto de matéria de quarks, é cercado por uma camada externa de matéria nuclear. Ainda, de acordo com os trabalhos de Weber (1999); Weber e Negreiros (2011); Weber (2005), as restrições em termos de massa dos quarks só permitem que sejam criados os quarks mais leves ( $u, d, s$ ), uma vez que os quarks ( $c, b, t$ ) são muito pesados. Este tipo de estrela tem a característica de ser extremamente denso:  $10^{15} \text{ g/cm}^3$ , com aproximadamente  $10^{57}$  partículas, sendo que os nêutrons participam de 80% de sua composição.

Neste trabalho, estudamos os modelos híbridos de estrelas de nêutrons. Modelos híbridos são estrelas onde as densidades variam de baixos valores na superfície até valores muito altos no centro. Na região de baixa densidade, a matéria se encontra na fase confinada, chamada de matéria nuclear ou hadrônica. Nas altas densidades, próximas do núcleo da estrela, a matéria pode estar em uma fase desconfinada. No entanto, a matéria não precisa ser homogênea (Glendenning, 2000). Em um determinado intervalo de densidades bariônicas, ambas as fases podem estar em regime de equilíbrio.

A determinação da equação de estado da matéria nuclear ainda é um tópico em aberto na física atual e, devido a isso, surgiram outros modelos baseados na mesma proposta do modelo de Walecka, no que passou a ser conhecido como modelos da hadrodinâmica quântica (do inglês *quantum hadrodynamics*, ou QHD daqui por diante). Alguns desses modelos são bastante conhecidos na literatura, como o modelo de Boguta-Bodmer, que propõe novos termos de auto-interação entre os mésons escalares, tornando o modelo não-linear ou o modelo de Zimanyi e Moszkowski que considera um acoplamento derivativo entre mésons e núcleons. Seguindo a mesma idéia de substituir o acoplamento mínimo, Taurines (1999) propôs o modelo derivativo Ajustável, no qual considera-se acoplamento derivativo ajustável por parâmetros matemáticos livres que permitem resgatar características de

outros modelos da hadrodinâmica quântica. Para caracterizar a matéria hadrônica, será utilizado o modelo SWRDP (Gomes et al., 2015), extensão do modelo de acomplamento derivativo que pretende incluir forças de muitos corpos na descrição.

No regime de baixas densidades e temperaturas, os quarks se encontram confinados nos hádrons através da força atrativa da interação forte. Mas conforme nos aproximamos de temperaturas ou densidades altas, entra em cena a liberdade assintótica da cromodinâmica quântica, situação onde os quarks se comportam como um gás de partículas livres. Estes quarks possuem carga de cor e não podem se propagar no vácuo físico, apenas no vácuo perturbativo. A matéria de quarks é prevista pela QCD no regime de temperatura nula e altas densidades, e estudos indicam a possibilidade da existência de um estado da matéria de quarks que seria supercondutor de cor, e que a matéria de quarks seria o estado fundamental da interação forte, conhecido como hipótese da matéria estranha (Witten, 1984).

O cálculo necessário para descrever a matéria de quarks é em grande parte muito difícil. Graças a isso utilizam-se modelos efetivos na descrição da matéria de quarks. Um dos modelos mais simples é chamado MIT Bag model, desenvolvido em 1974, cujas equações de movimento são obtidas a partir de uma densidade lagrangiana relativística e que considera os quarks como sendo partículas não interagentes no interior de uma região denominada sacola que representa o caráter localmente desconfinado da fase. Neste trabalho iremos estudar dois modelos específicos: a teoria de campo médio da QCD, daqui por diante referida como MFTQCD (Fogaça e Navarra, 2011) e o extensão da QCD no infravermelho, daqui por diante referida como QCDIRE (Guimarães et al., 2015).

O ponto principal desta tese é estudar a existência ou não de uma transição de fases de primeira ordem da matéria hadrônica (SWRDP) para a matéria de quarks (MFTQCD e QCDIRE) através da construção de Maxwell. Os modelos hadrônicos e de quarks são estudados separadamente, bem como os seus parâmetros, com a intenção de estudar sua influência nas propriedades das estrelas híbridas. Também será feita uma análise dos modelos híbridos sob a perspectiva da teoria da informação, com a intenção de determinar quais espaços de parâmetros seriam mais prováveis de ocorrer na Natureza.

A tese é dividida como segue:

- **Capítulo 1 - Introdução:** Esta introdução.

- **Capítulo 2 - Evolução Estelar e Estrelas de Nêutrons:** Neste capítulo, são apresentadas as características gerais das estrelas e dos objetos compactos, abordando os principais fatos observacionais e teóricos. São apresentados a formação e vida das estrelas na sequência principal e os caminhos possíveis de evolução quando a estrela chega ao fim da sequência principal. Também são apresentados detalhes da estrutura e composição das estrelas de nêutrons.
- **Capítulo 3 - Relatividade Geral e Estrutura Estelar:** Neste capítulo são apresentados os fundamentos da teoria da relatividade geral e uma breve introdução às equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff e de Einstein-Maxwell-Fermi.
- **Capítulo 4 - Hadrodinâmica Quântica:** São apresentadas as propriedades da matéria nuclear, apresentados alguns modelos de hadrodinâmica quântica e o detalhamento do modelo SWRDP.
- **Capítulo 5 - Matéria de Quarks Fria:** Este capítulo apresenta as propriedades da matéria fria de quarks e descreve os modelos QCDIRE e MFTQCD.
- **Capítulo 6 - Transições de fase Hádrons  $\rightarrow$  CQM:** Ênfase na transição de fase entre a matéria nuclear em sua fase hadrônica e a fase de QGP, através da construção de Maxwell. Também são detalhadas as características da teoria da informação e como ela pode ajudar a inferir quais modelos seriam preferidos pela Natureza.
- **Capítulo 7 - CQM em estrelas de Nêutrons: Modelos e Observações:** Estabelece-se aqui o estudo da existência da transição de fase entre a matéria nuclear em sua fase hadrônica, descrita pelo modelo SWRDP, e a fase de matéria de quarks fria, descrita com os modelos *Mean Field Theory of QCD* (MFTQCD) e *QCD InfraRed Extension* (QCDIRE). Verificaremos como a variação dos parâmetros dos modelos repercute nas características da transição de fase e nas propriedades macroscópicas da estrela de nêutrons, bem como será utilizada a teoria da informação para estabelecer uma hierarquia de equações de estado.
- **Capítulo 8 - Entropia e Teoria da Informação:** Neste capítulo, é introduzida a Teoria da Informação e discutidos os resultados obtidos através desta teoria em comparação com os modelos obtidos no capítulo anterior.

- **Capítulo 9 - Estudos Complementares:** Aqui são mostrados os vínculos obtidos com o estudo das *unparticles* e objetos compactos.
- **Capítulo 10 - Conclusões:** Na parte final desse trabalho, são apresentadas as Conclusões e Perspectivas.





## Evolução Estelar e Estrelas de Nêutrons

Somos todos feitos do mesmo pó de estrelas.

---

Carl Sagan

Neste capítulo serão analisadas as características gerais das estrelas, sua evolução e possíveis caminhos evolucionários a partir da saída da sequência principal. Também serão revistas as propriedades das estrelas de nêutrons e um breve comentário sobre sua constituição e sobre a maneira mais adequada de descrevê-las, usando a relatividade geral.

### 2.1 *Características gerais*

Um dos principais objetivos da astrofísica sempre foi compreender a estrutura e a evolução das estrelas. As estrelas não são objetos estáticos, mas sim massas de gás quente cuja auto-gravidade é sustentada pelas reações nucleares que ocorrem no seu centro. A vida das estrelas começa com nuvens de gás e poeira em contração, até o ponto em que as reações nucleares se iniciam, e a estrela entra na chamada sequência principal, fase na qual a estrela passa a maior parte de sua vida, fundindo hidrogênio em hélio (Kippenhahn e Weigert, 1990; Carroll e Ostlie, 1996). Quando o combustível de hidrogênio se esgota, ocorre a “morte” da estrela, saindo rapidamente da sequência principal para seu estado final de evolução, que pode ser uma anã branca, uma estrela de nêutrons ou um buraco negro. De todos os fenômenos astrofísicos, pode-se dizer que o mais essencial para a compreensão da vida é a evolução das estrelas e a eventual evolução de algumas delas em supernovas. Apenas alguns dos elementos mais leves foram produzidos durante a nucleossíntese primordial no Big Bang, nenhum deles mais pesado do que o lítio (Weinberg, 1993). Elementos com

massa menor ou igual à do  $Fe$  são produzidos em reações termonucleares que ocorrem durante o longo período de evolução da estrela, variando de  $10^6$  a  $10^{12}$  anos. Conforme a estrela evolui, o processo  $s$  (processo de nucleossíntese com captura lenta de nêutrons que ocorre em relativamente baixas densidades e temperaturas intermediárias) cria elementos mais pesados, enquanto os elementos com massa superior à do  $Fe$  são formados nas explosões de supernova, via processo  $r$ . Assim, tudo o que compõe a vida na Terra foi sintetizado, em grande parte, do material proveniente de antigas gerações de estrelas.

### 2.1.1 Formação e Vida na sequência Principal

A vida de toda estrela tem início em uma nuvem constituída principalmente por hidrogênio e um pouco de poeira cósmica. Essa nuvem pode atingir dimensões da ordem de centenas de anos-luz e massas de até  $10^7 M_{\odot}$ , com temperaturas muito baixas ( $10 - 100K$ ). Portanto, o início da atividade estelar é composto de gigantescas, tênues e opticamente invisíveis nuvens de gás e poeira. O movimento desordenado das partículas da nuvem provoca flutuações de densidade. Flutuações desse tipo podem formar um acúmulo ligeiramente mais denso do que o resto da nuvem, e esse núcleo inicia um processo de acreção de matéria da nuvem, fazendo com que ela, então, se contraia sob ação da própria gravidade. Quando uma determinada região da nuvem passa a se comportar dessa maneira, diz-se que ela atingiu a chamada massa de Jeans. A nuvem, assim, colapsa por causa da atração gravitacional, obedecendo às leis da termodinâmica, através de uma série de estados de quase-equilíbrio. A nuvem colapsa de dentro para fora, com o material do centro sofrendo queda livre e o material mais externo permanecendo estacionário. Aos poucos, o colapso se espalha por toda a nuvem. É necessário um período de cem mil a um milhão de anos para que matéria com massa equivalente a uma massa solar se acumule no núcleo da nuvem (Maciel, 2002). A energia potencial gravitacional do material em queda no interior da nuvem é convertida em energia térmica no núcleo, formando uma onda de choque na superfície, onde a matéria é freada por forças de viscosidade. O caroço em formação no centro da nuvem constitui uma protoestrela. A onda de choque na superfície da mesma aquece o gás a cerca de um milhão de graus, seguindo-se um rápido resfriamento por radiação, que é absorvida pela nuvem de matéria que cerca a protoestrela; portanto, não há evidências telescópicas definitivas da formação deste tipo de objeto. Essa radiação também desacelera a taxa de acreção de matéria pela protoestrela.

À medida que a protoestrela ganha massa e colapsa, a temperatura em seu interior aumenta. Como o colapso é um processo lento e quase-estático, o teorema do virial se torna uma boa aproximação (Karttunen et al., 2013; Carroll e Ostlie, 1996), prevendo que metade da energia gravitacional se converte em energia cinética e que a outra metade da energia seja irradiada. A princípio, essa radiação escapa, mas, conforme a densidade e a pressão aumentam, a protoestrela se torna opaca, e o equilíbrio termodinâmico é pela primeira vez estabelecido, com o campo de radiação sendo descrito por uma temperatura local relacionada com a energia cinética do gás. Então, parte da radiação escapa, enquanto a maior parte dela é consumida num processo de ionização da nuvem circundante. Quando o interior da nuvem se torna altamente ionizado, estabelece-se o equilíbrio hidrostático. Para o Sol, isso ocorreu quando ele tinha aproximadamente sessenta vezes o tamanho atual.

À medida que a protoestrela continua a colapsar, a temperatura em seu interior aumenta rapidamente, estabelecendo uma grande diferença entre a temperatura das camadas centrais e a das camadas mais externas. A energia gravitacional perdida é transportada à superfície por convecção, como determinou o astrofísico japonês Hayashi (Hayashi, 1961). Nas camadas mais externas da protoestrela, a energia cinética do agitado movimento de convecção é convertida em radiação. A temperatura necessária para que se atinja o equilíbrio entre a energia mecânica das correntes de convecção e a energia de radiação depende da composição química e da massa da protoestrela. Essa temperatura fica na faixa de  $2500 - 3000 K$  na superfície da protoestrela e permanece aproximadamente constante durante a assim chamada fase de Hayashi da evolução, que é exatamente a fase em que subsistem as correntes de convecção no interior da protoestrela.

Nesse processo, a protoestrela continua a diminuir de tamanho devido à atração gravitacional. Conforme a estrela se aproxima de seu estágio de luminosidade final, a evolução se torna mais lenta, e um núcleo em equilíbrio radiativo cresce, enquanto a zona convectiva diminui com o aumento da temperatura central. Quando a massa da protoestrela cresce a alguns décimos da massa do Sol, a temperatura aumenta até atingir alguns milhões de Kelvin, e a fusão de elementos leves (como lítio, berílio e boro) tem início. Além disso, a fusão do deutério tem importante papel na evolução da protoestrela apesar da raridade desse isótopo.

A fusão do deutério ocorre em uma determinada camada da protoestrela e ocasiona ejeção de matéria, interrompendo o processo de acreção. Os primeiros processos de fusão

não são capazes de parar o colapso da protoestrela; logo, esse processo continua e, por fim, faz com que a temperatura no interior atinja  $10^7 K$ , quando, então, se inicia a fusão do hidrogênio e a estrela rapidamente entra em equilíbrio. A energia gerada se iguala àquela irradiada, o equilíbrio se estabelece, e a estrela entra na sequência principal. As estrelas ficam a maior parte de suas vidas na sequência principal, gerando enormes quantidades de energia fundindo hidrogênio em hélio num processo de fusão termonuclear. O termo fusão termonuclear se refere à fusão nuclear caracterizada pelo chamado efeito túnel através da barreira Coulombiana entre núcleos, sendo que a agitação térmica fornece a energia para o tunelamento.

Quando todo hidrogênio do núcleo se esgota, a queima de hidrogênio continua ocorrendo em uma camada em torno do núcleo. A estrela continua sua vida como uma gigante vermelha, até que a temperatura no núcleo aumente o suficiente para que tenha início a fusão do hélio. A partir daí, a estrela rapidamente passa da queima de hélio para a queima de elementos mais pesados (carbono, neônio, oxigênio, magnésio e silício), sendo que o processo de geração de energia por fusão irá terminar com a produção de ferro, elemento com maior energia de ligação nuclear. Deste momento em diante, a fusão não será mais um processo exotérmico. A massa da estrela é o fator que determina em que elemento o processo de fusão nuclear vai definitivamente se encerrar.

Dependendo de sua massa, a estrela poderá seguir três caminhos distintos, transformando-se em uma anã branca, uma estrela de nêutrons, ou um buraco negro (ver Fig.2.1).

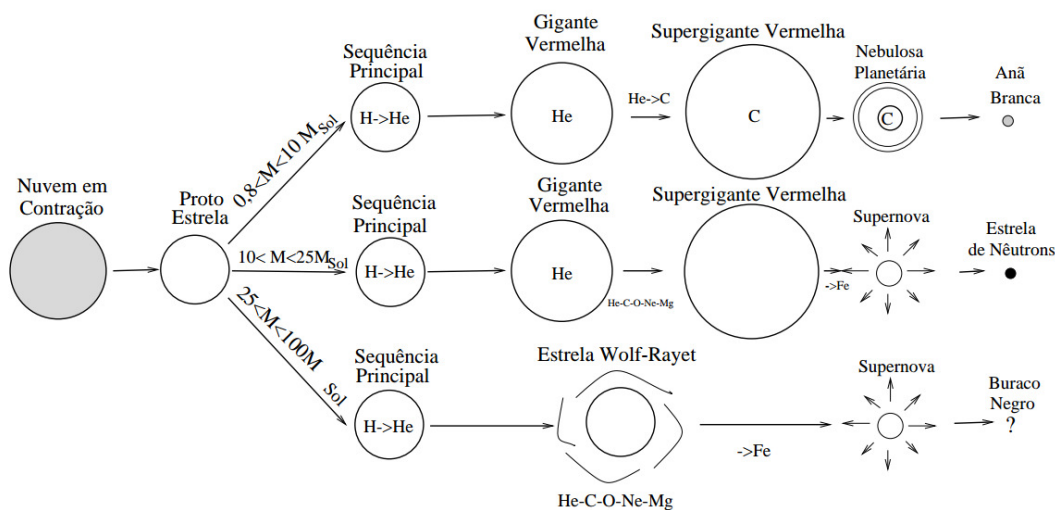


Figura 2.1: Esquema de evolução estelar, para massas diferentes Oliveira e Saraiva (2000).

### 2.1.2 Estágios Finais de Evolução Estelar

Quando toda energia produzida pelas reações nucleares se esgota, a estrela colapsa para seu estágio final de evolução. Nesta seção, vamos discutir brevemente os possíveis estágios finais de evolução.

#### *Anãs Brancas*

Apenas as estrelas mais massivas conseguem levar as reações termonucleares até o ponto de síntese do ferro (estrelas com massas  $M \geq 9.5 M_{\odot}$ ). As reações nucleares são mais lentas e incompletas nas estrelas mais leves. Para estrelas de até algumas massas solares, a contração se inicia quando o hidrogênio se esgota no caroço. Conforme a temperatura aumenta, o hidrogênio passa a ser queimado em camadas mais externas. O envelope se expande lentamente para formar uma gigante vermelha, enquanto o caroço continua a se contrair e se aquecer. Em  $10^8 K$ , três núcleos de hélio se fundem para formar carbono, no chamado processo triplo- $\alpha$ . Em temperaturas mais altas, o processo triplo- $\alpha$  é seguido pela fusão de mais um núcleo de hélio, formando-se oxigênio. Essas reações, algumas vezes, começam de maneira explosiva. Por fim, pulsações no envelope geram instabilidade, e a maior parte da massa da estrela é ejetada para formar uma nebulosa planetária, desde que a massa da estrela obedeça a relação  $M_* < 8M_{\odot}$ .

O caroço restante da estrela é composto principalmente por hélio, carbono, oxigênio ou magnésio (podendo ocorrer mistura), dependendo de quão longe as reações nucleares foram. Com a perda do envelope, a temperatura necessária para a ocorrência da fusão termonuclear não pode mais ser mantida, e o caroço colapsa sob sua própria gravidade. Durante a contração, a pressão aumenta proporcionalmente ao produto da temperatura pela densidade, mas não chega a ser suficiente para estabilizar o que restou da estrela de maneira a evitar o colapso. Após a contração, a matéria se torna degenerada, o que significa que os átomos perdem suas características químicas ao sofrerem alterações em sua estrutura eletrônica e se tornando completamente ionizados. O comportamento dos elétrons arrancados pela alta pressão é governado pelo princípio da exclusão de Pauli, que impede dois elétrons de ocuparem o mesmo estado quântico simultaneamente. A pressão do gás de Fermi degenerado formado pelos elétrons pode ser grande o suficiente para interromper o colapso se a massa da estrela estiver abaixo de um valor crítico em

torno de  $1.4M_{\odot}$  (Chandrasekhar, 1957). A densidade crítica necessária para que se atinja o estado degenerado é de cerca de  $1000 \text{ g/cm}^3$ , o que é cerca de 10000 vezes maior do que a densidade central do Sol.

As estrelas sustentadas pela pressão de um gás de Fermi degenerado são chamadas de anãs brancas. A maioria dos objetos astronômicos são batizados tendo-se por base alguma característica descritiva e com as anãs brancas não foi diferente. A anã branca era a menor estrela conhecida até a época de sua descoberta. Possui um raio de poucos milhares de quilômetros; portanto, a anã branca é relativamente pequena, considerando-se que sua matéria está comprimida a uma densidade muito alta, ou seja, em um volume muito menor do que aquele que a estrela que lhe deu origem tinha quando estava na sequência principal. A densidade média de uma anã branca fica em torno de  $10^6$  vezes a densidade da Terra, sendo que a alta temperatura em sua superfície a faz parecer branca. Em comparação, uma anã branca possui raio da ordem do raio da Terra, com uma massa muito maior, atingindo um limite de  $1.4M_{\odot}$ . Sua fonte de luz é o calor gerado em antigos processos nucleares e o resíduo da energia gerada no início de sua vida é irradiado como fótons por  $10^{10}$  anos.

A estrutura interna de uma anã branca está representada na Fig.2.2.

### *Estrelas de Nêutrons*

Estrelas com massa acima de  $8M_{\odot}$  evoluem mais rapidamente do que as estrelas progenitoras das anãs. As reações termonucleares seguem mais adiante, e a estrela fica cada vez mais quente até se expandir numa gigante vermelha. Para estrelas massivas, o estágio de gigante vermelha é frequentemente chamado de supergigante, expressando que a sua massa e o seu tamanho são muito maiores comparados com aquelas formadas a partir de estrelas leves. No centro da estrela, os processos nucleares chegam a formar o ferro. Nesse estágio, o caroço da estrela é sustentado apenas pela pressão dos elétrons não-relativísticos degenerados. A fusão nuclear continua em camadas circundantes de *Si*, *O*, etc., em torno da região central de ferro. O caroço tem um raio de algumas centenas de quilômetros, dentro de uma supergigante vermelha com raio maior do que  $10^8 \text{ km}$ .

A fusão nas camadas mais externas aumenta a massa do caroço e a gravidade comprime o caroço a uma densidade onde os elétrons se tornam relativísticos. A pressão exercida por eles agora aumenta menos rapidamente com o aumento da densidade do que no estágio anterior, quando os elétrons eram não-relativísticos. Além disso, a energia cinética dos

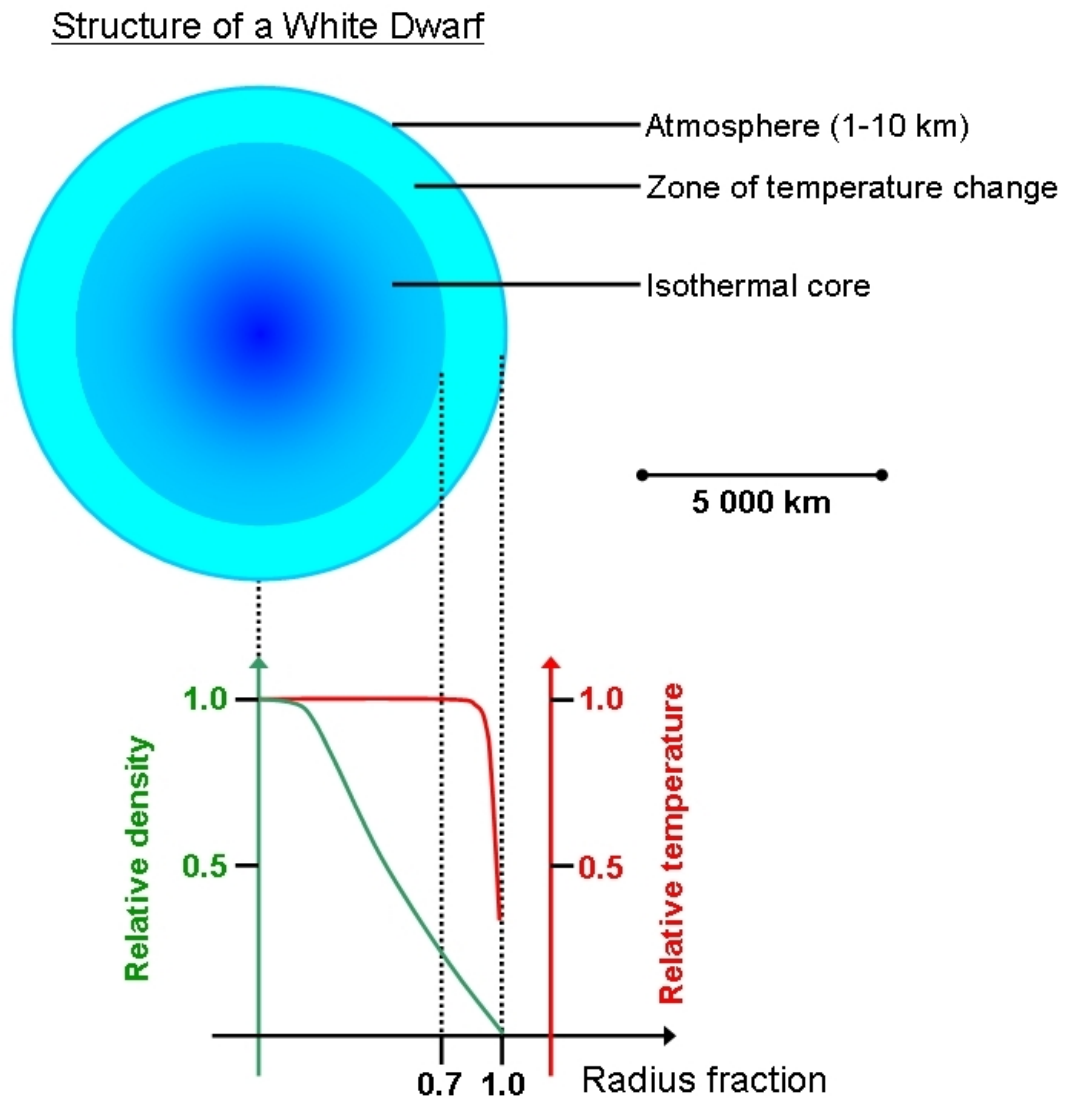


Figura 2.2: Estrutura geral de uma anã branca (Imagem obtida de BotRejectsInc (2016)).

elétrons relativísticos atinge, nesse estágio, o ponto em que a captura de prótons, isto é, o processo de decaimento  $\beta$  inverso, produz um estado energeticamente mais favorável. A pressão dos elétrons está abaixo do ponto em que pode suportar o aumento de massa no caroço, o que leva o mesmo a atingir sua massa máxima, a massa de Chandrasekhar, assim chamada em homenagem a S. Chandrasekhar, que descobriu o limite de massa para um objeto sustentado pela pressão de elétrons ultra-relativísticos degenerados (Chandrasekhar, 1931). O fato é que cada processo de fusão termonuclear necessita de uma energia de ignição, gerada a partir da energia gravitacional. Em 1931, Chandrasekhar determinou as massas necessárias para que uma estrela desse início a esses processos, como pode ser visto

a seguir.

$$H \rightarrow 0.08 M_{\odot} \quad (2.1)$$

$$He \rightarrow 0.25 M_{\odot} \quad (2.2)$$

$$C \rightarrow 1.06 M_{\odot} \quad (2.3)$$

$$Ne \rightarrow 1.37 M_{\odot} \quad (2.4)$$

Como já apontado na subseção anterior, uma anã branca (estrela ainda sustentada pela pressão do gás de elétrons) é composta, basicamente, pelos núcleos citados acima, o que determina a massa máxima para uma estrela desse caráter como  $1.47M_{\odot}$  (Chandrasekhar, 1931), massa essa para a qual já é possível formar o oxigênio. A partir desse ponto, a pressão dos elétrons degenerados não será mais capaz de sustentar a pressão gravitacional, determinando uma região de instabilidade entre as fases de anãs brancas e estrelas de nêutrons. Em outras palavras: se a massa do caroço da estrela, nesse estágio, estiver abaixo da massa de Chandrasekhar, a estrela tende a se transformar em uma anã branca, conforme descrito na subseção anterior; do contrário, após uma fase explosiva (supernova), o colapso do caroço não pode ser impedido pela pressão dos elétrons, dando início à formação das chamadas estrela de nêutrons.

Quando a pressão do gás de elétrons não é grande o suficiente para contrabalançar a pressão da força gravitacional sobre o caroço, este começa uma rápida e violenta implosão, tornando-se extremamente quente, chegando a atingir, em poucos segundos, temperaturas da ordem de  $MeV$  ( $\sim 10^{11} K$ ). O caroço é preenchido com neutrinos energéticos produzidos pelo decaimento  $\beta$  inverso. A seção de choque para a interação dos neutrinos energéticos com os núcleos em densidades típicas de  $10^{12} g/cm^3$  é grande o suficiente para confinar, através de colisões, os neutrinos dentro do caroço em implosão. Eles são levados junto com o material em queda sobre o caroço, enquanto a temperatura do caroço atinge dezenas de  $MeV$ . À medida que a matéria do caroço é comprimida a altas densidades, a energia de Fermi dos elétrons e neutrinos termalizados aumenta, e a pressão por eles então exercida resiste à compressão gravitacional da matéria em queda.

O material em queda ricocheteia sobre o caroço rígido, provocando uma onda de choque que se propaga radialmente para fora e, nesse processo, vai dissipando sua energia por perda de neutrinos e fotodesintegração de todos os núcleos em seu caminho. A onda de choque



fica estagnada a poucas centenas de quilômetros a partir do centro da estrela. Quando o material estelar que está além da região ocupada pelo caroço não é mais sustentado pelo caroço, uma onda de descompressão se propaga para fora à velocidade do som na difusa matéria estelar da supergigante vermelha. Porém, esse sinal leva um longo tempo para chegar à superfície da estrela, comparado ao tempo de implosão do caroço, da formação da onda de choque e de sua subsequente estagnação. Assim, o material em queda fica aprisionado ao chegar à frente de choque estagnada, formando uma frente de acreção. O material acrescido aquece a região de choque e acreção, e, ao mesmo tempo, o momentum e a massa desse material exercem um gradiente de pressão em direção ao centro. Uma região rarefeita se forma entre o caroço de alta densidade e a frente de choque e acreção, como uma imensa bolha. Pares neutrino-antineutrino vindos do interior se aniquilam e, assim, favorecem a expansão do envelope sendo capturados na região do choque. Através de um complexo e não inteiramente compreendido balanço entre convecção e aquecimento gerado por neutrinos, uma pequena fração da energia de ligação da estrela de nêutrons em formação é transportada para a frente de acreção, e sua energia fornece a energia cinética necessária para a ejeção de todo o material, exceto o caroço da estrela progenitora. Essa enorme ejeção de material estelar é a explosão de supernova. O envelope da estrela ejetado na explosão se expande com uma velocidade de  $10000 \text{ km/s}$ . A energia liberada em um colapso de supernova é tanta que o brilho da explosão tem luminosidade equivalente à de uma galáxia de 200 bilhões de estrelas.

Após a explosão de supernova, o caroço quente e colapsado, ou proto estrela de nêutrons, com temperatura de dezenas de  $MeV$ , libera os neutrinos contidos em seu interior ao longo de um intervalo de poucos segundos e se resfria a  $1 \text{ MeV}$  ou menos, como mostrado por Burrows e Lattimer (1986). Nesse ponto, o caroço colapsado atingiu sua composição de equilíbrio, com nêutrons, prótons, híperons, léptons e, possivelmente, quarks, formando a estrutura que é chamada de estrela de nêutrons. Seu raio é de cerca de dez quilômetros, e sua densidade média é  $10^{14}$  vezes maior do que a densidade da Terra. Até  $\approx 10^5$  anos a estrela se resfria pela emissão de neutrinos, e após isso a estrela continua se resfriando por milhões de anos através de uma lenta difusão de fótons à superfície e sua irradiação ao espaço.

Como este tipo de estrela é o principal tópico desta tese, elas serão estudadas em detalhe na Sec.2.2.

### *Buracos Negros*

Para uma fração desconhecida de estrelas massivas em colapso gravitacional, a explosão de supernova parece falhar na ejeção de quantidade suficiente de matéria. Portanto, a estrela progenitora continua a colapsar até se transformar em um buraco negro de massa aproximadamente igual a da estrela pré-supernova – mais de  $20 M_{\odot}$ , talvez chegando a  $100 M_{\odot}$ , na chamada formação direta. Assim ocorre, pois há um limite máximo de massa, chamado de limite de massa de Oppenheimer-Volkoff, que é a massa máxima que pode ser sustentada pela pressão dos nêutrons degenerados e sua interação repulsiva, evitando o colapso gravitacional, que fica dentro de um intervalo de  $1.5 M_{\odot}$  a  $3 M_{\odot}$  (Bombaci, 1996). Existe ainda um mecanismo de colapso retardado que pode ocorrer após a formação de uma proto estrela de nêutrons e ejeção da maior parte da matéria estelar em uma explosão de supernova. O colapso retardado pode acontecer se a proto estrela de nêutrons tiver massa próxima à massa limite, mesmo que uma explosão de supernova já tenha ejetado a maior parte da massa da estrela progenitora. Nesse caso, um buraco negro leve, em torno de  $3 M_{\odot}$ , poderá ser criado, apesar de não existirem observações. Buracos negros com essa massa podem ser criados, também, por um processo de colapso induzido por acreção em estrelas de nêutrons constituintes de sistemas binários. Essas estrelas de nêutrons podem lentamente acretar matéria de uma companheira menos densa, e sua superfície será aquecida pelo material em queda sobre ela. Quando a taxa de acreção de matéria é tal que a pressão de radiação da superfície quente contrabalança a força gravitacional que atua sobre o material acretado, um limite é alcançado, conhecido como limite de Eddington. Acreção de matéria por uma estrela de nêutrons cujo caroço tenha massa próxima do limite de massa de Oppenheimer-Volkoff pode fazê-la colapsar a um buraco negro antes que se atinja o limite de Eddington, embora novamente é enfatizado que não existem observações. Buracos negros são estruturas das quais nem mesmo a luz pode escapar, matematicamente consideradas como uma singularidade nas equações de Einstein da relatividade geral. Esta singularidade corresponde ao assim chamado raio de Schwarzschild. Para melhor compreensão do que isso significa, utilizando um argumento puramente newtoniano e heurístico, basta considerar o balanço entre a energia cinética de uma partícula de massa  $m$  com velocidade próxima a da luz e a energia gravitacional que

ela sofre ao interagir com um objeto astronômico de raio  $R$  e massa  $M$

$$\frac{1}{2}mc^2 = \frac{GmM}{R}, \quad (2.5)$$

de onde vem que  $R = 2GM/c^2$  ou, no sistema relativístico de unidades em que  $G = c = 1$ ,  $R = 2M$  (Weinberg, 1972).

Quando um objeto astronômico atinge esse limite, ele e toda matéria nele contida colapsam. Devido à forte atração gravitacional, nada consegue escapar de sua atração, e a captura da luz impede sua detecção visual. Evidências de sua existência podem ser encontradas na observação do movimento de estrelas encontradas nas regiões centrais de galáxias, alterando seu movimento devido à presença de um objeto tão massivo nas suas proximidades. Buracos negros são geralmente descritos como estruturas extremamente densas; isto não é, entretanto, uma verdade absoluta. Um buraco negro deve apenas respeitar a condição deduzida anteriormente, determinando-se com isto a sua densidade  $\rho$

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} > \frac{3}{32\pi M^2} \quad (2.6)$$

Essa condição leva a uma dependência da densidade do buraco negro em função da massa do objeto colapsado

$$\rho > \frac{1.8 \times 10^{16}}{(M/M_\odot)^2} g/cm^3 \quad (2.7)$$

Em um exercício hipotético, se a Via-Láctea colapsasse, agregando uma massa equivalente a  $10^{12}M_\odot$ , geraria um buraco negro com densidade e raio dados por

$$\rho > \frac{1.8 \times 10^{-8}}{(M/M_\odot)^2} g/cm^3 \quad (2.8)$$

$$R = 3.0 \times 10^{12} km \quad (2.9)$$

Tabela 2.1 - Comparação entre as propriedades do Sol com diferentes objetos estelares compactos.

Objeto	Massa ( $M_\odot$ )	Raio ( $R_\odot$ )	Densidade ( $g/cm^3$ )	Potencial ( $GM/Rc^2$ )
Sol	1	1	1	$10^{-6}$
Anã Branca	$\sim 1$	$10^{-2}$	$10^6$	$\sim 10^{-4}$
Estrela de Nêutrons	1 – 3	$10^{-5}$	$10^{15}$	$\sim 10^{-1}$
Buraco Negro	Arbitrário	$2GM/c^2$	$\sim M/R^3$	$\sim 1$

Aqui encerra-se a discussão sobre buracos negros, pois os mesmos são estados extremos de pura gravitação e qualquer informação sobre a matéria se perde por trás do horizonte dos eventos.

## 2.2 Mais a Respeito das Estrelas de Nêutrons

A descoberta do nêutron por Chadwick (1932) causou euforia entre os físicos. Landau, assim que soube da notícia em Copenhague, rapidamente elaborou o conceito de uma esfera de nêutrons auto-gravitante onde a massa máxima chegaria a  $0.7 M_{\odot}$  (Landau, 1932). Baade e Zwicky, um ano depois, conceberam que a energia necessária para provocar o fenômeno das supernovas poderia ser a energia gravitacional de um objeto altamente compacto como uma estrela de nêutrons (Baade e Zwicky, 1934). Sugeriram que as estrelas de nêutrons poderiam ser formadas nas explosões de supernova, nas quais o caroço de ferro de uma estrela massiva ultrapassa o limite de Chandrasekhar e colapsa. A enorme quantidade de energia liberada no colapso ejeta o resto da estrela, e o caroço colapsado poderia formar uma estrela de nêutrons. Para haver eficiente produção de estrelas de nêutrons através desse mecanismo, Baade e Zwicky estimaram que a massa máxima de uma estrela de nêutrons deveria exceder  $1.4M$ . Apesar desse rápido desenvolvimento inicial, não se sabia como detectar tais objetos, pois eles seriam muito pequenos e sem um mecanismo apropriado para irradiar energia. Como consequência, houve uma estagnação do tema até 1939, quando Tolman (1939); Oppenheimer e Volkoff (1939) desenvolveram um formalismo inicial para a análise de tais objetos, considerando que esses objetos seriam estados gravitacionalmente ligados de um gás de Fermi de nêutrons. Assim, calcularam sua massa como sendo de  $0.77 M_{\odot}$  compactada em um raio de  $10 \text{ km}$ , resultando uma densidade de  $\sim 6 \times 10^{15} \text{ g/cm}^3$ . Para efeitos de comparação, a densidade da matéria nuclear dentro de um núcleo massivo como  $Pb^{208}$  é de aproximadamente  $0.16 \text{ núcleons/fm}^3$ , isto é, algo em torno de  $2.7 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ . Note-se que a massa máxima por eles prevista estava abaixo do limite de Chandrasekhar, discutido em Chandrasekhar (1931). Woltjer, baseando-se na conservação do fluxo magnético, estimou que os campos magnéticos em estrelas de nêutrons deveriam ser das ordem de  $10^{12}$  gauss (Woltjer, 1964). Pacini, em 1967, propôs que uma estrela de nêutrons altamente magnetizada poderia emitir energia (Pacini, 1968). Até então, todo esses trabalhos não passavam de conjecturas teóricas.

Em 1967, em Cambridge, Hewish e seus colaboradores estavam desenvolvendo um radiotelescópio de resposta rápida, de modo a poder separar pequenas oscilações do ruído no sinal. Usando esse equipamento, uma estudante de pós-graduação da equipe de Hewish, Jocelyn Bell, de 24 anos, percebeu um sinal persistente e extremamente periódico, com

um pulso a cada 1.337 segundos. Era descoberto, assim, o primeiro pulsar (Hewish et al., 1968). Logo, os assim chamados pulsares foram identificados com uma estrela de nêutrons em rotação pelos trabalhos de Pacini (1968) (que, em 1967, propôs que uma estrela de nêutrons altamente magnetizada poderia emitir energia) e Gold (1969). Hewish recebeu o Prêmio Nobel em 1974 pela descoberta.

A posterior detecção do pulsar do Caranguejo, no remanescente da supernova do Caranguejo, supernova esta observada na China em 1054, confirmou a ligação entre estrelas de nêutrons e pulsares, dando início aos esforços para melhor se entender as estrelas de nêutrons (Fig.2.3).

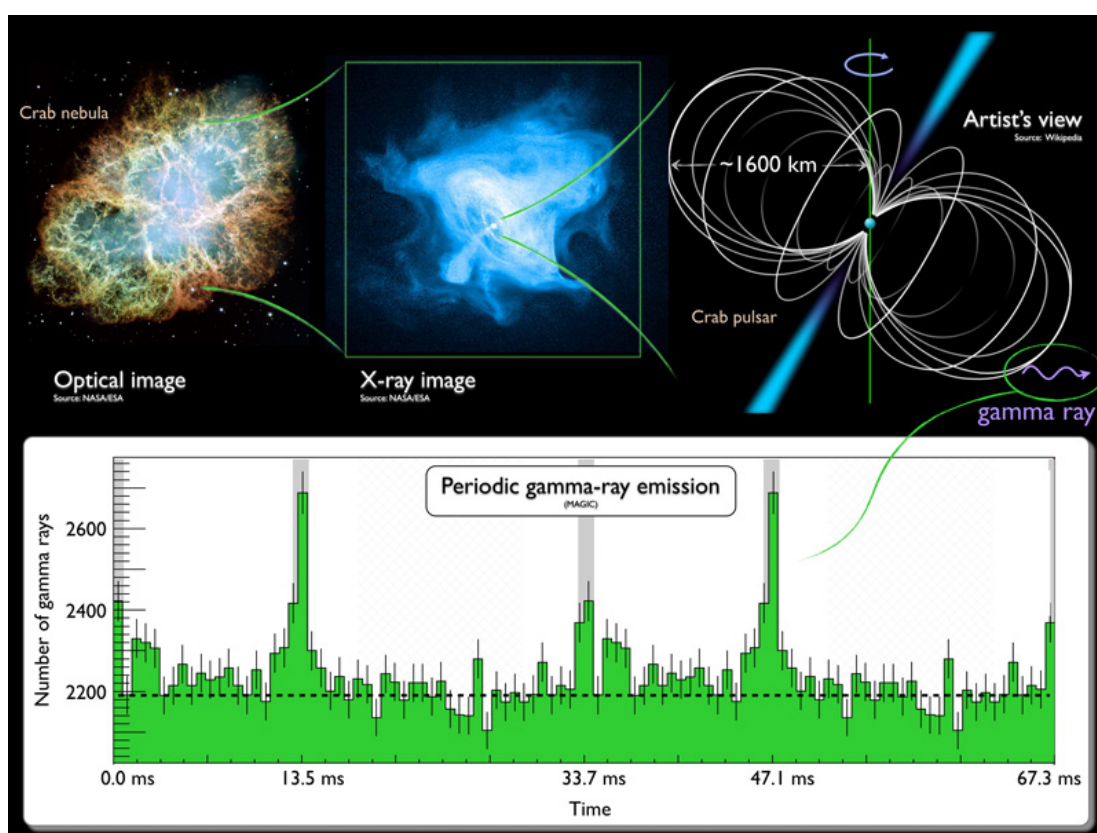


Figura 2.3: A imagem mostra a Nebulosa do Caranguejo vista através de um telescópio óptico (esquerda), e telescópio de raios-X (centro), com uma representação gráfica do campo magnético do pulsar (direira). A curva de luz (abaixo) mostra a emissão regular de raios gamma em intervalos de 0.0337 segundos, ou dois pulsos por rotação. Para maior clareza, dois períodos são mostrados. (NASA, ESA, J. Hester, A. Loll, CXC, SAO, F. Seward et al., MAGIC Collaboration)

### 2.2.1 Composição

Apesar de seu nome, as estrelas de nêutrons são compostas por uma gama extremamente rica de partículas. Elas também contêm prótons e, como se verá mais adiante, dependendo da região de energia da estrela em questão, é plausível encontrar, no seu interior, o octeto bariônico completo, bem como léptons (para estabelecer neutralidade de carga), mésons (mediadores de interação) e *quanta* de calibre das interações fraca, forte e eletromagnética.

### 2.2.2 Equação de Estado

Em física e particularmente em termodinâmica, uma equação de estado é a relação entre variáveis de estado termodinâmicas. Mais especificamente, uma equação de estado é a equação termodinâmica descrevendo a matéria sob um dado conjunto de condições físicas, descrevendo matematicamente a relação entre duas ou mais funções de estado associadas à matéria, como sua temperatura, pressão, volume ou energia interna. Equações de estado são ferramentas indispensáveis na descrição das propriedades de fluidos, misturas de fluidos, sólidos, e como veremos no restante desta tese, interiores estelares.

O intervalo de densidades relevantes para estrelas de nêutrons é muito grande. Na borda da estrela, onde a pressão é nula, a densidade é da ordem da densidade do ferro, enquanto, no centro, a densidade é da ordem de  $10^{15} \text{ g/cm}^3$ .

Podem ser definidas quatro regiões de densidade em uma estrela de nêutrons e para cada uma delas se determina uma equação de estado apropriada. Para densidades entre  $2 \times 10^3 \text{ g/cm}^3$  e  $10^{11} \text{ g/cm}^3$ , que correspondem à matéria cristalina, aos metais leves e ao gás de elétrons, é usada, em geral, a equação de estado de Harrison et al. (1965). Para densidades entre  $10^{11} \text{ g/cm}^3$  e  $2 \times 10^{13} \text{ g/cm}^3$ , que correspondem ainda à matéria cristalina, aos metais pesados e ao gás de elétrons relativísticos, é muito usada a equação de estado de Negele e Vautherin (1973). A equação de estado BPS, proposta por Baym et al. (1971) engloba as duas situações anteriores.

Para densidades entre  $2 - 5 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ , que correspondem à matéria de núcleons, híperons e léptons relativísticos, será descrita a equação de estado SWRDP no Cap.4 e para densidades superiores, as equações de estado MFTQCD e QCDIRE no Cap.5, onde são introduzidos os graus de liberdade da QCD.

### 2.2.3 Estrutura

No interior das estrelas de nêutrons, os nêutrons são partículas degeneradas. Da mesma forma, pode-se mostrar que os elétrons também o serão, porém em densidades e pressões menores que a densidade onde os nêutrons degeneram. Essa característica é importante no processo de neutronização da estrela, no qual os elétrons degenerados induzem o decaimento  $\beta$  inverso, colidindo com um próton e formando um nêutron e um neutrino do elétron. Esperaria-se que houvesse um subsequente decaimento  $\beta$ , fazendo que o nêutron decaísse em um elétron, um próton e um anti-neutrino do elétron. As expressões para o decaimento  $\beta$  inverso e o decaimento  $\beta$  são mostradas abaixo:

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e \quad (2.10)$$

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e \quad (2.11)$$

Contudo, como os elétrons gerados nessa reação devem possuir energia menor que a dos elétrons originais, o processo não poderá ocorrer pois todos os níveis de energia estarão ocupados. Dessa forma, prótons serão convertidos em nêutrons em núcleos que possuem uma repulsão coulombiana menor, tornando a formação de núcleos mais pesados possível (Oliveira e Saraiva, 2000).

Os núcleos de  $^{56}Fe$  e  $^{58}Ni$  serão os mais estáveis até densidades  $\rho \equiv 4 \times 10^{11} g/cm^3$ . Acima dessas densidades, ocorre o fenômeno de “neutron drip” (Baym et al., 1971), no qual os nêutrons escapam dos núcleos, passando a ser livres e em equilíbrio com os elétrons e núcleos atômicos no interior da estrela. Para densidades ainda maiores, os núcleos unem-se formando um gás de prótons, elétrons e nêutrons. Quando a densidade é da ordem de  $\rho \sim 10^{15} g/cm^3$ , é mais energeticamente favorável para o sistema que surjam partículas como píons, múons e híperons, bem como condensados mesônicos, de acordo com Mesquita (2010). Finalmente, para densidades superiores, o desconfinamento dos quarks torna-se possível, bem como a existência de uma fase de quarks superfluida (Alford et al., 2008).

A física da matéria densa permite várias possíveis estruturas internas de uma estrela de nêutrons. Estas possíveis estruturas estão elencadas na Fig.2.4.

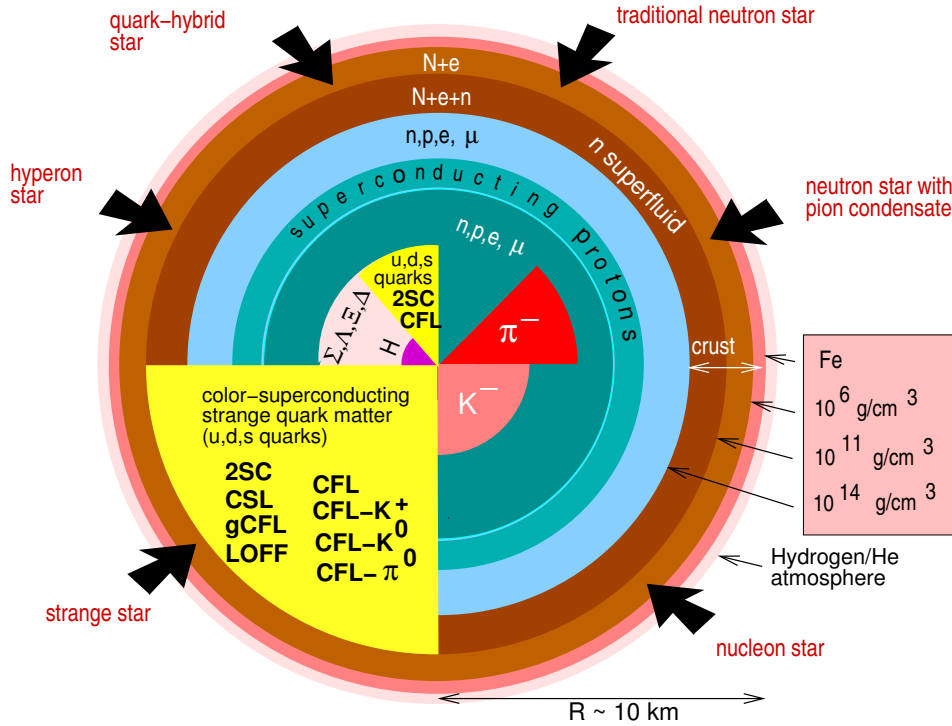


Figura 2.4: Ilustração esquemática do interior de uma estrela de nêutrons. A massa de aproximadamente  $2 M_{\odot}$  compactada em um raio de aproximadamente  $10 \text{ km}$  fornece densidades entre 10 e 20 vezes a do núcleo atômico (Weber, 2005).

#### 2.2.4 Diagrama Massa-Raio

A distribuição de massa das estrelas de nêutrons e sua massa máxima são tópicos extremamente importantes da astrofísica de estrelas compactas. Grandes incertezas observacionais existem nas medidas das massas das mesmas, e até o momento a maioria das medidas de massa de pulsares indica um intervalo para estas massas está na faixa de 1 a  $3 M_{\odot}$ , como pode-se ver na Fig.2.5(Lattimer e Prakash, 2005). Ainda, Valentim et al. (2011) mostram que a distribuição de massa pode apresentar dois picos de massa, apresentando uma distribuição bimodal com picos em  $1.37 M_{\odot}$  e  $1.73 M_{\odot}$ .



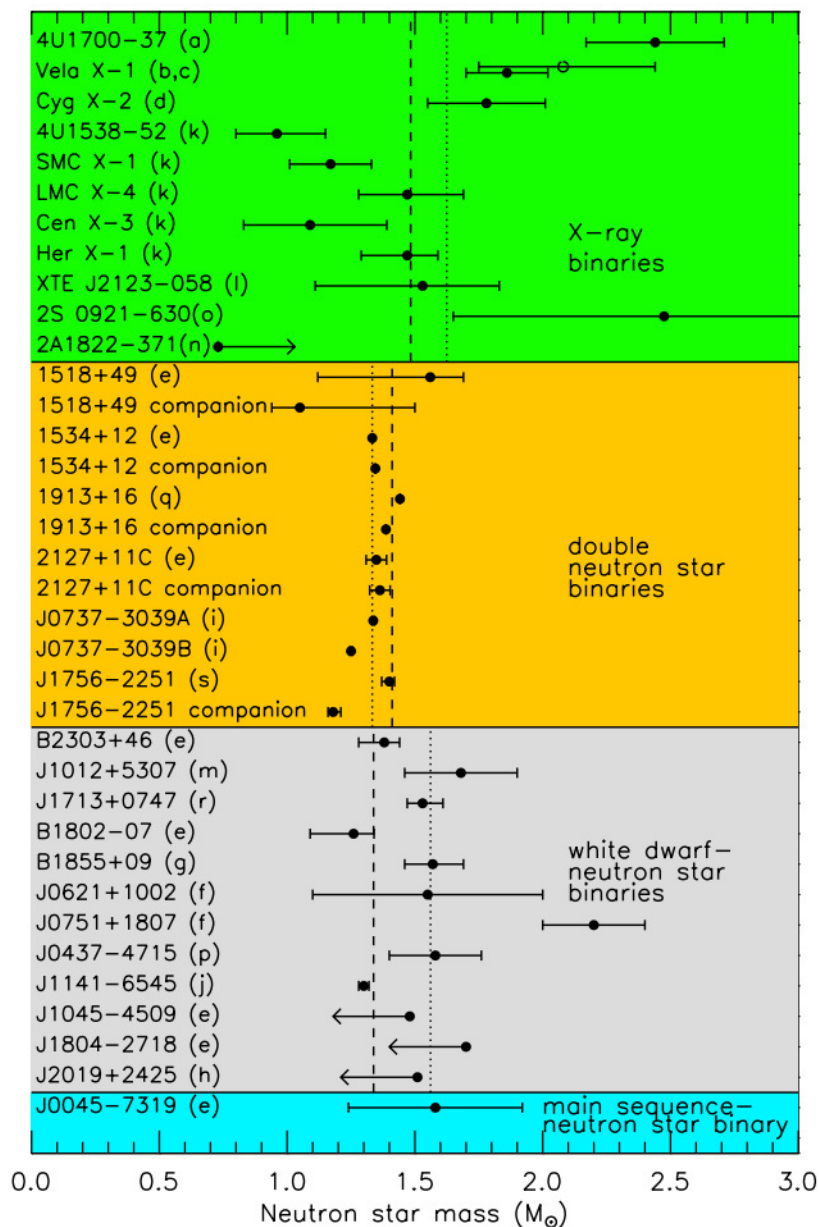


Figura 2.5: Massas medidas e estimadas de estrelas de nêutrons em pulsares e acretantes de raio-x binárias em rádio (Lattimer e Prakash, 2005).

As abordagens para as equações de estado são diversas, e cada uma destas abordagens utilizam considerações teóricas distintas, fazendo com que mesmo que duas equações tenham a mesma composição interna levem a um valor de massa máxima diferente. Isso pode ser visto na Figura 2.6.

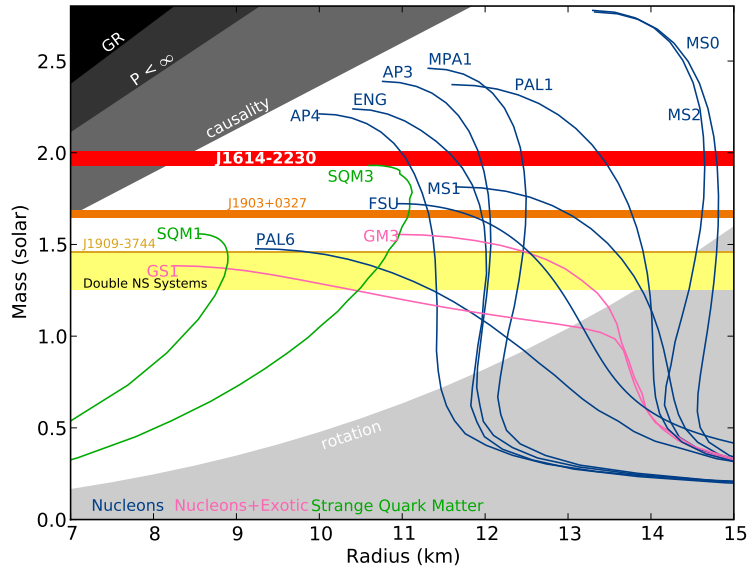


Figura 2.6: Diagrama massa-raio para estrelas de nêutrons. O gráfico mostra a massa versus o raio para algumas equações de estado encontradas na literatura. As faixas horizontais mostram medidas de massas observadas. Todas as curvas que não alcançam as massas máximas observadas são excluídas, descartando as teorias que descrevem o interior das estrelas de nêutrons (Figura retirada de Demorest et al. (2010)).

O diagrama massa-raio também fornece outro tipo de informação. O estudo de Alford et al. (2013) sugere que a topologia do diagrama fornece um critério de estabilidade para as estrelas, dependendo da posição que a estrela ocupa dentro do diagrama (Figura 2.7).

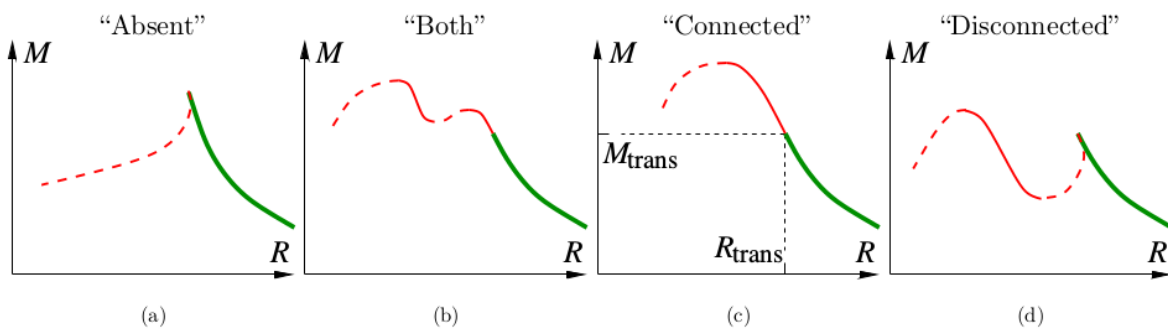


Figura 2.7: Quatro possíveis topologias para a relação massa-raio para estrelas híbridas. A linha verde representa o ramo hadrônico. A linha sólida vermelha indica híbridas estáveis. Linhas vermelhas pontilhadas são híbridas instáveis. Em (a) o ramo das híbridas não existe. Em (b) existem os dois tipos de ramos. Em (c) existem ramos conectados. Em (d) os ramos são desconectados. Em modelos realistas de diagramas massa-raio de estrelas de nêutrons, a cúspide que ocorre nos casos (a) e (d) são muito pequenas e difíceis de distinguir (Figura retirada de Alford et al. (2013)).

## Relatividade Geral e Estrutura Estelar

Quem é o terceiro?

---

Sir Arthur Eddington

Estrelas e proto-estrelas de nêutrons são sustentadas contra a “pressão gravitacional” através da pressão de degenerescência dos nêutrons contidos no seu interior. Para descrever a estrutura dessas estrelas, podemos utilizar as equações da relatividade geral conhecidas como equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) (Tolman, 1939; Oppenheimer e Volkoff, 1939). Essas equações são deduzidas dentro do formalismo da relatividade geral, a partir das equações de campo de Einstein, considerando-se a estrela como uma distribuição de matéria relativística, esfericamente simétrica, estática e composta por matéria que se comporta como um fluido perfeito. Apesar do formalismo TOV ser o mais aceito no cálculo da estrutura das estrelas relativísticas, existem alternativas como o formalismo de Thomas-Fermi aplicado à objetos compactos. O capítulo inicia com uma revisão da relatividade geral e seus principais conceitos, e depois são apresentados o formalismo TOV e de Einstein-Maxwell-Fermi.

### 3.1 Relatividade Geral

O princípio fundamental da relatividade geral diz que uma lei permanece válida quando é invariante frente a transformações de coordenadas em um sistema de referência. Einstein, ao elaborar a teoria da relatividade geral, combinou componentes espaciais e temporais em quadrivetores, como, por exemplo, na composição do elemento diferencial  $dx^\mu = (cdt, dx_1, dx_2, dx_3)^T = (cdt, dx, dy, dz)^T$ , onde  $T$  é o operador de transposição. Esse dife-

rencial, em relação a um novo referencial, transforma-se de acordo com

$$dx^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} dx^\nu \equiv \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (3.1)$$

onde índices que aparecem duplicados indicam uma soma, conhecida também como convenção de Einstein. Na relatividade geral, as componentes novas de um quadri vetor dependem das componentes do sistema de coordenadas espaciais e temporais originais. Essa propriedade já está presente na relatividade restrita, ao contrário da física clássica, em que espaço e tempo são tratados como grandezas independentes. A equação anterior, após ser derivada em relação ao tempo próprio  $\tau$ , fornece uma grandeza relevante para a hidrodinâmica relativística, a quadri-velocidade  $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$  (onde  $d\tau$  é o diferencial de tempo no sistema referencial onde vale  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)^T \equiv 0$  para as diferenças espaciais).

Um dos componentes principais da teoria da relatividade geral é o tensor energia-momentum. Tensores são objetos geométricos que descrevem reações lineares entre vetores, escalares e outros tensores. O tensor de energia-momentum é uma quantidade tensorial que descreve a densidade e fluxo de energia e momento no espaçotempo, generalizando o tensor de estresse da mecânica clássica e atuando como fonte do campo gravitacional para as equações de campo de Einstein.

O objeto de interesse desta tese são estrelas estáticas sem rotação, onde idealmente o fluido não apresenta movimento. Isso implica que o tensor energia-momentum de interesse é o de um fluido ideal, onde o único componente de  $\vec{U}$  diferente de zero é o componente  $U^0$  (temporal). Devido à ausência de interações entre elementos do fluido, não existem componentes de cisalhamento, ou seja, todos os elementos da matriz com ambos os coeficientes espaciais não diagonais são nulos. No referencial de repouso relativo ao fluido, o tensor energia-momentum se reduz a uma forma diagonal  $T^{\mu\nu} = \text{diag}(\epsilon/c, P, P, P)$ , onde a pressão é uma manifestação do fluxo de momentum nas respectivas direções, ou

$$T^{\mu\nu} = \left( \frac{\epsilon}{c} + p \right) U^\mu U^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

com  $U_\mu U^\mu = 1$ .

A partir da determinação do tensor energia-momentum, pode-se obter as equações dinâmicas levando em consideração os campos gravitacionais; essas equações dinâmicas contêm termos envolvendo segundas derivadas do tensor métrico  $\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha x_\beta}$ . A única possibilidade de estabelecer-se um tensor linear nas segundas derivadas da métrica tem a forma

(Weinberg, 1972):

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} = \frac{d\Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu}}{dx^{\beta}} - \frac{d\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}}{dx^{\gamma}} + \Gamma_{\sigma\beta}^{\mu}\Gamma_{\gamma\alpha}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\beta}^{\mu}\Gamma_{\gamma\alpha}^{\sigma} \quad (3.3)$$

e é chamada de tensor de Riemann. A existência de um tensor de Riemann, cujos termos envolvendo as segundas derivadas não desaparecem, implica na curvatura do espaço-tempo. O tensor de Riemann, por sua vez, tem ordem quatro. A redução para uma grandeza de ordem 2 é dada pela contração do tensor de Riemann, que resulta no tensor de Ricci  $R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}^{\mu}$  e adicionalmente no escalar de curvatura  $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ . A partir do tensor de Ricci e do escalar de curvatura, pode-se construir uma equação cuja quadri-divergência é nula e tem uma estrutura semelhante à do tensor de energia-momentum

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R. \quad (3.4)$$

Conservação de energia-momentum implica sua quadri-divergência nula, o que indica a proporcionalidade entre o tensor de Einstein e o de energia-momentum e define as equações de Einstein:

$$G^{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}. \quad (3.5)$$

As soluções dessas equações determinam, para um dado tensor energia-momentum, o tensor métrico associado que, no limite de campos fracos e estacionários, se reduz à expressão clássica de Newton. O significado dos termos adicionais pode ser entendido, contraindo-se as equações de Einstein, o que resulta em uma relação entre o invariante do tensor energia-momentum  $T$  e a curvatura escalar:

$$R = \frac{8\pi G}{c^4}T. \quad (3.6)$$

Isso permite escrever o tensor de Ricci em termos do escalar  $T$  e do tensor energia-momentum:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right). \quad (3.7)$$

A expressão de  $T$  para um fluido perfeito é  $T = \frac{\epsilon}{c} - 3p$ , o que resulta em uma equação de Poisson modificada para o potencial de gravitação

$$\nabla^2\phi = \frac{4\pi G}{c^4} \left( \frac{\epsilon}{c} + 3p \right). \quad (3.8)$$

Então, para um gás de partículas que se movimentam com a mesma velocidade  $u$ , a densidade efetiva de energia é  $\epsilon(1 + \frac{u^2}{c^2})$ , o que mostra que um fluido dominado por radiação gera uma atração gravitacional duas vezes a do limite newtoniano.

O tensor energia-momentum para um fluido perfeito é útil para fazer contato com as equações da termodinâmica estatística, que podem ser utilizadas para caracterizar propriedades da matéria nuclear e da propagação do som, que é correlacionada com a compressibilidade da matéria nuclear.

A teoria da relatividade geral é o ponto de partida para o estudo da estrutura interna das estrelas compactas. Será visto adiante duas abordagens diferentes para a obtenção da estrutura estelar.

### 3.2 Equilíbrio hidrostático e equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Como visto em Horvath (2011), o estudo da estrutura das estrelas (newtonianas, não relativísticas) partem das equações de equilíbrio hidrostático e da equação de continuidade de massa,

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} \quad (3.9)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r). \quad (3.10)$$

As quantidades que aparecem na equação de equilíbrio hidrostático (Eq.(3.9)) não são independentes. A massa interior ao raio será determinada pela densidade do material estelar. Portanto, a equação que relaciona essa dependência é a equação de continuidade da massa (Eq.(3.10)). A massa da estrela a ser modelada possui um papel importante na competição entre força gravitacional e pressão - quanto mais massiva a estrela, maior será a pressão necessária para compensar a gravidade. A pressão e temperatura serão mais altas no núcleo e vizinhanças. Por outro lado, uma estrela de baixa massa terá temperatura e pressão centrais mais baixas. Porém a gravitação Newtoniana não é capaz de descrever corretamente o comportamento de objetos muito compactos e massivos. Na teoria Newtoniana, não encontra-se evidência de massas máximas nas equações, ao passo que a teoria da relatividade geral prevê a obtenção de massas máximas para cada equação de estado utilizada. Faz-se, portanto, necessária a introdução de correções relativísticas nas equações de estrutura responsáveis por modelar o perfil estelar.

Além disso, estrelas de nêutrons são as menores e mais densas estrelas conhecidas. Elas têm, tipicamente, uma massa de  $1.4 M_{\odot}$  e um raio de  $\sim 10$  km, o que resulta numa densidade média de aproximadamente  $10^{15} g/cm^3$ . Numa concentração tão grande de massa,

a curvatura do espaço tempo tem de ser levada em conta, ou seja, propriedades macroscópicas da estrela devem ser contempladas pela teoria da relatividade geral. No espaço vazio em torno de uma estrela estática e esfericamente simétrica, a solução para as equações de Einstein resulta na métrica de Schwarzschild (Weinberg, 1972; Harrison et al., 1965) (considerando-se o sistema relativístico de unidades em que  $G = c = 1$ ):

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.11)$$

Para o interior da estrela, tanto o tensor de Ricci como a curvatura escalar dependem da matéria incluída numa esfera com raio  $r$ , conforme a lei de Gauss. Tomando-se as equações de campo de Einstein, com constante cosmológica nula, compatibilizadas com o limite newtoniano da teoria e considerando-se a solução de Schwarzschild citada acima, derivam-se as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (Tolman, 1939; Oppenheimer e Volkoff, 1939):

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{\epsilon(r)M(r)}{r^2} \left(1 + \frac{P(r)}{\epsilon(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{M(r)}\right) \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1} \quad (3.12)$$

e

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon(r). \quad (3.13)$$

Nas equações acima,  $P(r)$  é a pressão no raio  $r$ ,  $\epsilon(r)$  é a densidade de energia incluída na esfera de raio  $r$  e  $M(r)$  é a massa contida no raio  $r$ . Ao desprezar os três fatores da direita na Eq.(3.12) (correções relativísticas), recupera-se a equação de equilíbrio hidrostático clássica.

As equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff tornam-se singulares para  $r = 2M$ . Esta igualdade define o raio de Schwarzschild  $R_S$  da estrela. Fisicamente, este raio indica que se toda a massa do objeto for comprimida dentro de uma esfera de raio menor que  $R_S$ , a velocidade de escape do objeto seria igual à velocidade da luz e este objeto estaria invisível ao restante do universo.

Existem poucas situações onde é possível resolver as equações TOV analiticamente. Geralmente as soluções analíticas estão relacionadas à modelos de cunho didático (os chamados *toy-models*), não aplicáveis à modelos reais, exceção feita à modelos como Tolman IV (Tolman, 1939). A maioria das equações de estado com relevância física (i.e. passíveis de serem encontradas na Natureza) só são resolvidas via TOV numericamente. O uso das equações TOV é simplificado drasticamente do ponto de vista computacional se utilizada

a representação adimensional dos parâmetros físicos visto que, no caso das estrelas de nêutrons, as grandezas envolvidas são da ordem de  $\rho_c \approx 10^{15} \text{ g/cm}^3$  e  $p_c \approx 10^{39} \text{ erg/cm}^3$ .

A partir das trocas de variáveis  $\eta = r/a$  (raio adimensional),  $\bar{m} = M/M_*$  (massa),  $\bar{P} = P/\rho_0 \cdot c^2$  (pressão) e  $\bar{\epsilon} = \epsilon/\rho_0 \cdot c^2$  (densidade de energia), temos a versão adimensional das equações TOV:

$$\frac{d\bar{P}}{d\eta} = -\frac{[\bar{\epsilon}(\eta) + \bar{P}(\eta)][\eta^3 \cdot \bar{P}(\eta) + \bar{m}(\eta)]}{\eta^2 \left(1 - \frac{2\bar{m}(\eta)}{\eta}\right)} \quad (3.14)$$

$$\frac{d\bar{m}}{d\eta} = \eta^2 \cdot \bar{\epsilon}(\eta) \quad (3.15)$$

Os parâmetros  $a$  e  $M_*$  são a escala de raio e escala de massa respectivamente. Seus valores são:

$$a = \sqrt{\frac{c^2}{4\pi G \rho_c}} \quad (3.16)$$

$$M_* = 4\pi \rho_c a^3 = \frac{c^3}{\sqrt{4\pi G^3 \rho_c}} \quad (3.17)$$

A partir desta abordagem, as grandezas passam a estar restritas dentro de limites numéricos (a princípio) seguros, como vistos a seguir:

$$\epsilon \in [1, 0] \quad (3.18)$$

$$P \in \left[ P_c = \frac{p_c}{\rho_c c^2}, 0 \right] \quad (3.19)$$

Dentro do ponto de vista computacional, as formas das Eqs.(3.14) e (3.15) são mais apropriados para a integração via algoritmos numéricos (i.e. Runge-Kutta), como o implementado no programa *tousolver* (Apêndice D).

A seguir será feita uma revisão do modelo de Thomas-Fermi para cálculo da estrutura estelar.

### 3.3 Construção de Einstein-Maxwell-Fermi

A construção de Einstein-Maxwell-Fermi proposta por Rotondo et al. (2011b) é uma descrição de esferas auto-gravitantes com origem no modelo de Thomas-Fermi atômico.



Sua motivação foi obter um modelo que contabilizasse a presença dos campos elétricos na interface do núcleo das estrelas e verificar a existência da polarização do vácuo nesta interface.

O modelo de Thomas-Fermi é uma teoria quântica da estrutura eletrônica de sistemas de muitos corpos, desenvolvida semi-classicamente pouco depois da introdução da equação de Schrödinger. É uma teoria que não se baseia na mecânica quântica ondulatória e é precursora das teorias de densidade funcional, que utiliza o modelo estatístico para aproximar a distribuição de elétrons em um átomo. Embora os elétrons estejam distribuídos não uniformemente em um átomo, aproxima-se esta distribuição tal que os elétrons estejam distribuídos uniformemente em cada elemento diferencial de volume  $\Delta V$  (ou seja, localmente), porém a distribuição eletrônica  $n_e(\vec{r})$  pode variar de um elemento de volume para outro (Hussein e Salinas, 2002).

Lieb e Simon (1973) demonstram que a equação de Thomas-Fermi é uma teoria exata para átomos, moléculas e sólidos conforme  $Z \rightarrow \infty$ . Com base neste resultado, Rotondo et al. (2007) mostram em um exercício acadêmico para átomos com  $Z \approx 10^6$ , que a extensão relativística do modelo permite extrair informações da matéria nuclear no *bulk*<sup>1</sup> no limite de  $N \approx (m_{Planck}/m_n)^3 \approx 10^{57}$  nucleons de massa  $m_n$ , e também de suas propriedades eletrodinâmicas. Os autores também apontam que a análise do *bulk* de matéria nuclear composto de um gás degenerado de prótons, nêutrons e elétrons, tradicionalmente modelados como localmente neutros em nível microscópico através da condição da densidade eletrônica coincidir com a densidade de prótons,

$$n_e(r) = n_p(r), \quad (3.20)$$

pode não ser apropriada em situações próximas do colapso gravitacional, em que existiria uma componente ultra-relativística dos elétrons degenerados, cujo confinamento requer a existência de campos eletromagnéticos extremos para garantir a neutralidade local da estrela de nêutrons (Vereshchagin et al., 2010). Nestes casos, a condição Eq.(3.20) seria necessariamente violada. Assim, faz-se necessário um modelo que leve em consideração as seguintes questões:

- A existência dos campos elétricos próximos de um valor crítico  $E_c$  (a ser definido na

---

<sup>1</sup> Limite termodinâmico.

Sec.3.3).

- Relaxamento da condição de neutralidade local (Eq.(3.20)), ou seja, a neutralidade local deveria aparecer como uma consequência e não como uma imposição.
- De acordo com Tolman (1934) e Klein (1949), a gravidade afeta a termodinâmica do problema em regimes de espaçotempo curvos. Estes efeitos devem ser contabilizados também.

Rotondo et al. (2011b) afirmam ter obtido uma solução para este problema, conforme pode ser visto na Sec.3.3. Nas seções seguintes será mostrado a construção deste modelo, começando pelo modelo de Thomas-Fermi nuclear e seguindo até modelos nucleares superpesados, culminando na introdução da relatividade geral em modelos com número atômico da ordem de  $10^{57}$ .

#### *A teoria de Thomas-Fermi como modelo atômico*

O modelo de TF assume que os elétrons podem ser tratados pela estatística de Fermi-Dirac, onde os mesmos se comportam como um gás ideal de partículas com energia  $E$  tal que preencham o poço de potencial em torno de um núcleo positivamente carregado e pontual (Piza, 2003). A densidade de estados,  $n(E)$ , de um gás de elétrons livres é obtido ao aplicar condições de contorno periódicas e normalização em uma célula de comprimento  $L$ , onde se obtém

$$n(E) = \frac{L^3}{2\pi^2\hbar^3} (2m_e)^{3/2} E^{1/2} \quad (3.21)$$

A energia do gás aumenta com o aumento do número de elétrons. Para uma coleção de elétrons, o número em um ponto  $r$ ,  $N(r)$  é dado por

$$N(r) = \int_0^{E_F(r)} n(E) d(E) = \frac{L^3}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^{E_F(r)} E^{1/2} d(E) = \frac{L^3}{2\pi^2\hbar^3} E_F(r)^{3/2} \quad (3.22)$$

onde  $E_F(r)$  está associado com a máxima energia do *ensemble* de elétrons em  $r$ . A energia de Fermi  $E_F$  é simplesmente a energia (cinética) do estado de energia mais alto preenchido. No caso de um átomo de muitos elétrons, a energia total  $E_r$  de um elétron é  $E_r = E_k + eV(r)$ , onde  $V(r)$  é o potencial elétrico de uma carga puntiforme. No caso do

elétron ligado (*bound*),  $E_r \leq 0$ , o que requer que a energia cinética máxima do elétron seja  $E_F = -eV(r)$ . Da Eq.(3.22), a densidade de carga é

$$\rho(r) = \frac{N(r)}{L^3} = \frac{(2m_e)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} [-eV(r)]^{3/2}. \quad (3.23)$$

Nastasi et al. (1996) colocam que para termos uma condição de auto-consistência, exige-se que o potencial referente à densidade de carga dado pela Eq.(3.23), bem como o potencial relativo à carga nuclear reproduzam corretamente a energia potencial  $-eV(r)$ . Consequentemente, a densidade de carga  $-e\rho$  e o potencial eletrostático  $-V(r)$  devem satisfazer a equação de Poisson

$$\nabla^2 V = 4\pi(-e\rho) \quad (3.24)$$

ou

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV}{dr} \right) = -4\pi e \rho^2 = \frac{-4e[-2m_e V(r)]^{3/2}}{3\pi\hbar^3}. \quad (3.25)$$

As equações (3.23) e (3.25) podem ser resolvidas simultaneamente para  $\rho$  e  $V(r)$ , com as seguintes condições de contorno: conforme  $r$  vai a 0, o potencial deve ser devido ao núcleo, ou seja  $-Ze/r$ , e quando  $r$  tende a infinito, a carga líquida dentro da esfera de raio  $r$  deve ser 0.

A equação (3.23) e as condições de contorno são expressadas mais convenientemente em forma adimensional, onde  $Z$ ,  $E$ ,  $m_e$  e  $h$  aparecem em fatores de escala. Colocando

$$V(r) = \frac{-Ze}{r} \chi(x) \quad (3.26)$$

e fazendo a seguinte troca de variáveis

$$r = a_{TF} x \quad (3.27)$$

onde  $a_{TF}$ , o comprimento de *screening* de Thomas-Fermi, é dado por

$$a_{TF} = \frac{1}{2} \left( \frac{3\pi}{4} \right)^{3/2} \frac{\hbar^2}{m_e e^2 Z^{1/3}} = \frac{0.885 a_0}{Z^{1/3}}, \quad (3.28)$$

onde  $a_0 = \hbar^2/m_e e^2$  é o raio de Bohr. Com estas substituições, chega-se à equação de Thomas-Fermi,

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = \frac{\chi^{3/2}}{x^{1/2}}. \quad (3.29)$$

Uma das condições para verificações da validade da solução é que o número total de elétrons  $N$  deve obedecer a seguinte relação:

$$\int_0^\infty n(r) 4\pi r^2 dr = Z \quad (3.30)$$

ou, usando as relações adimensionais,

$$\int_0^\infty x^{1/2} \chi^{3/2}(x) dx = 1. \quad (3.31)$$

Uma vez resolvida a equação, obtém-se através das Eqs.(3.23), (3.26) e (3.27) as grandezas relevantes ao sistema, como densidade de carga, potencial eletrostático e raio respectivamente. Como pode ser notado, o sistema é construído modelando átomos de qualquer número de carga, utilizando justamente o número atômico como fator de escala.

#### *O modelo de Thomas-Fermi relativístico para núcleos super-pesados*

O estudo de átomos neutros com núcleos pesados de massa  $A \sim 10^2 - 10^6$  é um problema clássico da física teórica. Greenberg e Greiner (1982) estudaram a estabilidade dos mesmos em razão da repulsão Coulombiana e a existência de campos elétricos com energias maiores que o valor crítico

$$E_c = m_e^2 c^3 / e\hbar, \quad (3.32)$$

próximos à suas superfícies (Popov, 1971).

Uma das abordagens a este problema é extrapolar a solução de um sistema atômico com  $Z$  baixo ( $< 137$ ) para  $Z \approx 10^4 - 10^6$ . Porém, neste caso, alguns cuidados devem ser tomados, já que um sistema atômico com massa desta ordem é estruturalmente diferente, logo mais complexo. Neste caso, o sistema passa a ter três características:

1. Necessidade de se introduzir um tamanho físico ao núcleo.
2. A penetração da “nuvem eletrônica” no núcleo.
3. A definição de uma carga nuclear efetiva.

Ruffini (2007) desenvolve a dedução do arcabouço relativístico para a abordagem de Thomas-Fermi neste regime, seguindo a metodologia apresentada na Seção 3.3, sem ainda considerar um núcleo extenso. O potencial eletrostático é dado por  $\nabla^2 V(r) = 4\pi en(r)$ , a densidade numérica dos elétrons está relacionada ao momento de Fermi  $p_F$  por  $n = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3}$ . Uma das condições de equilíbrio é que a energia de Fermi obedeça a relação  $E_F = c\sqrt{p_F^2 + m^2c^2} - mc^2 - eV(r)$ .

Fazendo a troca de variáveis análoga ao modelo não relativístico, com o potencial eletrostático  $\phi(r) = V(r) + E_F = \frac{Z_e}{e}\chi(r)$ ,  $Z_c = \frac{3\pi^{1/2}\hbar c^{3/2}}{4e^2}$ ,  $r = a_{TF}x$  chega-se à equação de Thomas-Fermi relativística:

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = \frac{\chi^{3/2}}{x^{1/2}} \left[ 1 + \left( \frac{Z}{Z_c} \right)^{4/3} \frac{\chi(x)}{x} \right]^{3/2}. \quad (3.33)$$

#### A necessidade de um núcleo extenso

O modelo de Thomas-Fermi, a priori, demanda que o núcleo seja pontual. No caso relativístico, isso leva à não integrabilidade da densidade eletrônica próxima a origem. Para contornar o problema, Ruffini e Stella (1981) assumem um núcleo uniformemente carregado, com um raio  $r_{nuc}$  e massa  $A$  dada pelas expressões semi-empíricas

$$r_{nuc} = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 \approx 1.5 \times 10^{-13} \text{cm}, \quad Z \equiv \left[ \frac{2}{A} + \frac{3}{200} \frac{1}{A^{1/3}} \right]^{-1}, \quad (3.34)$$

Assim, a Eq.(3.33) fica como

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = \frac{\chi^{3/2}}{x^{1/2}} \left[ 1 + \left( \frac{Z}{Z_c} \right)^{4/3} \frac{\chi(x)}{x} \right]^{3/2} - \frac{3x}{x_{nuc}^3} \theta(x_{nuc} - x) \quad (3.35)$$

onde  $\theta = 1$  para  $r < r_{nuc}$ ,  $\theta = 0$  para  $r > r_{nuc}$ ,  $\chi(0) = 0$ ,  $\chi'(0) = 0$  (Ferreirinho et al., 1980). Um dos aspectos mais importantes desta abordagem é que a solução da equação leva a possibilidade da existência de processos de polarização do vácuo na superfície do núcleo, onde Popov (1971) afirma que os campos elétricos podem ser maiores que o campo elétrico crítico (Eq. (3.32)). Contabilizar a presença destes campos é importante no sentido de que eles viabilizariam a ocorrência da polarização do vácuo na interface do núcleo.

### Matéria nuclear em grandes quantidades (*bulk*) e a equação de Thomas-Fermi-Dirac ultra-relativística

A existência de uma teoria escalável e relativística para o núcleo atômico (factível ou não, i.e. *toy model*) levou à especulação de que estrelas de nêutrons poderiam ser tratadas como um gigantesco núcleo com  $A \approx (m_{Planck}/m_n)^3 \approx 10^{57}$  núcleons. Neste caso, Ruffini (2007) afirma ser necessário abandonar a imposição da neutralidade local de carga, e generalizar o caso relativístico com núcleo pontual para o caso relativístico com núcleo extenso. Popov et al. (2009) deduzem a expressão a partir das seguintes suposições: a densidade numérica dos prótons é constante dentro de um raio  $r \leq R_c$  e igual a 0 fora do raio  $r > R_c$ . O valor assumido é  $n_p = \frac{1}{3\pi^2\hbar^3}(P_p^F)^3 = \frac{3N_p}{4\pi R_c^3}\theta(R_c - r)$ ,  $R_c = \Delta \frac{\hbar}{m_\pi c} N_p^{1/3}$ , onde  $P_p^F$  é o momento de Fermi dos prótons,  $\theta(R_c - r)$  é a função escada e  $\Delta \approx (r_0/\lambda_\pi)(A/Z)^{1/3}$ , com  $r_0 \approx 1.2 \text{ fm}$ . Como  $\lambda_\pi = \hbar/(m_\pi c)$ ,  $\Delta \approx 1$  (Carvalho et al., 2014). A energia de Fermi do próton é dada por

$$E_p(P_p^F) = [(P_p^F c)^2 + m_p^2 c^4]^{1/2} - m_p c^2 + eV(r), \quad (3.36)$$

onde  $e$  é a carga do próton e  $V$  é o potencial coulombiano. Baseado na lei de Gauss,  $V(r)$  deve obedecer a equação de Poisson, desta vez considerando a carga líquida <sup>2</sup>, ou

$$\nabla^2 V = -4\pi e[n_p(r) - n_e(r)]. \quad (3.37)$$

Tal configuração permite obter a densidade numérica dos elétrons

$$n_e(r) = \frac{(P_e^F)^3}{3\pi^2\hbar^3} = \frac{1}{3\pi^2\hbar^3 c^3} = [e^2 V^2(r) + 2m_e c^2 eV(r)]^{3/2}. \quad (3.38)$$

Novamente, seguindo o procedimento de adimensionalização, temos que  $x = r/[\hbar/m_\pi c]$  e  $\chi/r = eV(r)/(c\hbar)$ . Fazendo a algebra necessária, chega-se à equação de Thomas-Fermi relativística para núcleos extensos

$$\frac{1}{3x} \frac{d^2 \chi}{dx^2} = -\frac{\alpha}{\Delta^3} \theta(x_{nuc} - x) + \frac{4\alpha}{9\pi} \left[ \frac{\chi^2}{x^2} + \frac{m_e}{m_\pi} \frac{\chi(x)}{x} \right]^{3/2} \quad (3.39)$$

Ainda assim é necessário a densidade numérica dos nêutrons, que é determinada univocamente pela condição da energia de Fermi associada ao momento de Fermi imposto pelo equilíbrio  $\beta$ ,

<sup>2</sup> Vemos que neste caso o *screening* pode acontecer dentro do núcleo.

$$\begin{aligned}
E_n^F &= [(P_n^F c)^2 + m_n^2 c^4]^{1/2} - m_n c^2 \\
&= [(P_p^F c)^2 + m_p^2 c^4]^{1/2} - m_p c^2 + eV(r),
\end{aligned} \tag{3.40}$$

que por sua vez estão relacionados à densidade numérica do próton e do elétron pelas Eqs.(3.37), (3.38) e (3.39).

Esta dedução ainda não é definitiva. Rotondo et al. (2011a) apontam para o fato que o modelo de Thomas-Fermi pode não ser apropriado pelo fato de não levar em consideração forças de troca (*exchange*). Logo o modelo de Thomas-Fermi-Dirac deve ser utilizado, o que altera as equações para

$$\frac{1}{3x} \frac{d^2 \chi(x)}{dx^2} = -\frac{\alpha}{\Delta^3} \theta(x_c - x) + \frac{4\alpha}{9\pi} \left\{ \gamma \left( \frac{m_e}{m_\pi} + \frac{\chi}{x} \right) + \left[ \left( \frac{\chi}{x} \right)^2 + 2 \frac{m_e \chi}{m_\pi x} \right]^{1/2} \right\}^3, \tag{3.41}$$

onde  $\gamma = (\alpha/\pi)/(1 - \alpha^2/\pi^2)$  e  $\alpha$  é a constante de estrutura fina. Os autores também concluem que para núcleos de tamanhos estelares ( $A \approx 10^{57}$ ) estes efeitos são irrelevantes. Porém neste caso, uma nova situação aparece: o modelo está sendo usado numa situação onde claramente devem ser levados em conta os efeitos da relatividade geral. Este desenvolvimento é feito na próxima seção.

### O sistema Einstein-Maxwell-Fermi

Rotondo et al. (2011b) afirmam que as equações de estrutura relativísticas não são suficientes para modelar corretamente a estrutura de objetos relativísticos. Na referência, os autores reexaminam as propriedades gravitacionais e eletrodinâmicas das estrelas de nêutrons devido à criação de campos elétricos no processo de colapso, que por sua vez levam à polarização do vácuo (Vereshchagin et al., 2010). Partindo destes efeitos e utilizando uma generalização do tratamento dado por Feynman, Metropolis e Teller (Feynman et al., 1949) aos átomos comprimidos em regimes relativísticos, foi reforçada a condição de equilíbrio  $\beta$  para núcleos pesados, porém o modelo impossibilita a condição de neutralidade local, garantindo apenas a neutralidade global.

Toma-se como ponto de partida a extensão à relatividade geral da condição de equilíbrio de Thomas-Fermi, na energia de Fermi generalizada  $E_e^F$  do componente do elétron

$$E_e^F = e^{\nu/2} \mu_e - m_e c^2 - eV = \text{constante}, \quad (3.42)$$

onde  $e$  é a carga fundamental,  $V$  é o potencial Coulombiano da configuração, com a métrica

$$ds^2 = e^{\nu(r)} c^2 dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (3.43)$$

para uma estrela de nêutrons sem rotação e esfericamente simétrica. A função da métrica  $\lambda$  é relacionada à massa  $M(r)$  e ao campo elétrico  $E(r) = -e^{-(\nu+\lambda)/2} dV/dr$  através de

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} + \frac{G}{c^4} r^2 E^2(r). \quad (3.44)$$

O conjunto estendido de equações para configurações em equilíbrio das estrelas de nêutrons, consistindo das equações de Einstein-Maxwell e a equação de Thomas-Fermi relativística são

$$M' = 4\pi r^2 \frac{\mathcal{E}}{c^2} - \frac{4\pi r^3}{c^2} e^{-\nu/2} \hat{V}' (n_p - n_e), \quad (3.45)$$

$$\nu' = \frac{2G}{c^2} \frac{4\pi r^3 P/c^2 + M - r^3 E^2/c^2}{r^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{Gr^2}{c^4} E^2\right)}, \quad (3.46)$$

$$P' + \frac{\nu'}{2} (\mathcal{E} + P) = -(P^{\text{em}})' - \frac{4P^{\text{em}}}{r}, \quad (3.47)$$

$$\hat{V}'' + \frac{2}{r} \hat{V}' \left[ 1 - \frac{r(\nu' + \lambda')}{4} \right] = -4\pi \alpha \hbar c e^{\nu/2} e^\lambda \left\{ n_p - \frac{e^{-3\nu/2}}{3\pi^2} [\hat{V}^2 + 2m_e c^2 \hat{V} - m_e^2 c^4 (e^\nu - 1)]^{3/2} \right\}, \quad (3.48)$$

onde  $\alpha$  é a constante de estrutura fina,  $\hat{V} = E_e^F + eV$ ,  $P^{\text{em}} = -E^2/(8\pi)$ .

Com base nestas equações de estrutura, os autores clamam que as soluções das mesmas com equações de estado onde a neutralidade local é forçada não são capazes de gerar soluções estáveis. Ainda, que à temperatura  $T \rightarrow 0$  apenas a “*dust solution*” com energia cinética nula das partículas poderiam satisfazer a condição de neutralidade global de carga, logo este tipo de solução é não passível de ser encontrado na Natureza.

Como é possível verificar na Fig.3.1, o sistema de equações é capaz de produzir uma solução com neutralidade local.

Apesar disso, o modelo de Thomas-Fermi, em qualquer versão, seja não relativística, relativística, ultra-relativística ou integrado com as equações de Einstein-Maxwell, favorece



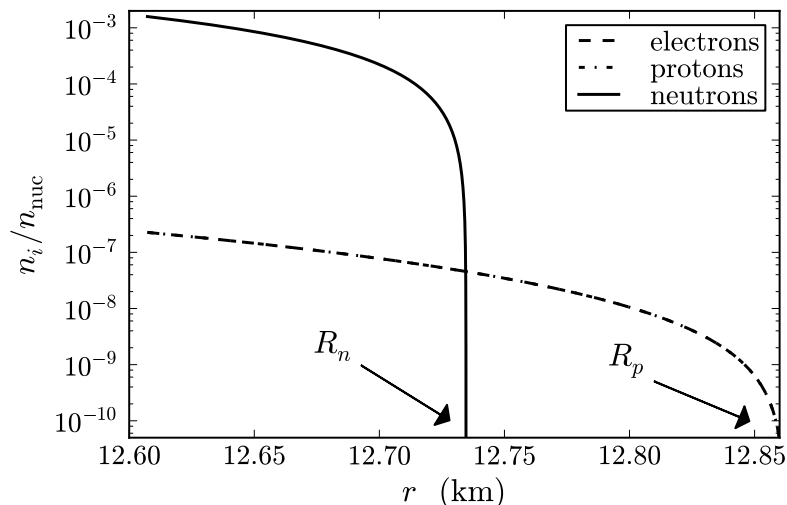


Figura 3.1: Densidade numérica de prótons, nêutrons e elétrons para uma configuração em unidades de densidade nuclear  $n_{\text{nuc}} \simeq 0.16 \text{ fm}^{-3}$  (Rotondo et al., 2011b).

intrinsecamente a não-neutralidade local. O modelo parte do princípio que as distribuições de prótons e elétrons estão separadas (como no átomo de Bohr ou nuvens de elétrons no modelo ondulatório de Schrödinger), tal que soluções com distribuições que aceitem a relação definida na Eq.(3.20) são exceções.

### 3.4 Análise das diferentes abordagens

Nas seções anteriores foram detalhadas dois tipos de abordagens para o cálculo da estrutura estelar, considerando os efeitos da relatividade geral. A abordagem canônica representada pelas equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV, Seção 3.2), e o chamado ‘novo paradigma’ representado pela abordagem de Einstein-Maxwell-Fermi (EMF, 3.3).

O primeiro ponto a ser levar em consideração é que a abordagem EMF aplicada à objetos compactos não é adequada para o modelo com equações de estado híbridas, pois leva apenas graus de liberdade hadrônicos na sua formulação, deixando de lado considerações com relação à matéria de quarks. Outra questão importante é a própria característica intrínseca do modelo de EMF: o modelo é construído a partir do modelo de Thomas-Fermi atômico, aumentando o número atômico e acrescentando correções ao mesmo conforme li-

mites vão sendo alcançados e efeitos físicos vão se fazendo importantes, como por exemplo a transição núcleo pontual  $\rightarrow$  núcleo extenso, com a penetração da nuvem eletrônica no núcleo conforme  $A$  aumenta. Com isso, é de se esperar que um objeto com número de massa  $A \approx 10^{57}$  conserve as características de um átomo comum (já que basicamente o conceito aplicado na construção do modelo é um *scaling*, introduzindo correções em determinados limites), ou seja, intrinsecamente são objetos com neutralidade de carga global e não local, já que isso é uma característica própria do núcleo atômico.

Esta abordagem leva à um raciocínio circular: o modelo inteiro é desenvolvido a partir de uma teoria onde não existe neutralidade local (corretamente), que por sua vez é utilizado em uma equação de estado sem forçar esta neutralidade, e finaliza afirmando a impossibilidade da existência da neutralidade local, pois se esta neutralidade fosse forçada, existiriam inconsistências. Portanto, o que se conclui desta abordagem é que a neutralidade global realmente não é introduzida no modelo, mas aparece *ab initio*, considerando que é baseada no modelo atômico que é intrinsecamente neutro, mas não localmente dentro de sua fronteira.

O modelo EMF leva em consideração não apenas os efeitos da relatividade geral, mas também a composição do objeto que se quer modelar, característica não compartilhada pela sua contrapartida TOV, desde que o objeto seja descrito apenas por graus de liberdade hadrônicos. É uma característica importante, porém não suficiente para que seja considerado seguro abandonar o modelo canônico.

## Hadrodinâmica Quântica

Não há beleza sem alguma estranheza.

---

Edgar Allan Poe

Hádrons são partículas compostas por quarks, que se apresentam na natureza sob a forma de mésons (partículas compostas por um quark e um anti-quark) ou bárions (partículas compostas por três quarks). Para que uma descrição mais fundamental dos hádrons seja feita é preciso que os graus de liberdade dos quarks sejam considerados, tal que a interação entre eles seja descrita pela interação forte.

A teoria mais aceita para a descrição da interação forte é a cromodinâmica quântica (QCD, do inglês *Quantum Chromodynamics*): bárions e mésons constituídos por quarks interagindo via troca de glúons. Esses, ao contrário dos fótons da eletrodinâmica quântica, possuem a carga associada à interação (carga de cor) e interagem uns com os outros, o que complica muito o formalismo e torna a teoria quase intratável. No limite de altas densidades ou de grandes transferências de momentum, a descrição dos processos da QCD é facilitada pelo fenômeno de liberdade assintótica; os quarks interagem muito fracamente e podem ser usados métodos de perturbação. Para densidades da ordem da densidade nuclear, o alto grau de acoplamento das partículas é revelado no confinamento dos quarks em bárions e mésons. A teoria mostra-se, então, extremamente complexa e avessa aos métodos tradicionais de aproximação. Inúmeras tentativas de contornar esse problema - fundamental para a física nuclear - foram feitas, principalmente através do desenvolvimento de modelos fenomenológicos ou efetivos.

Em particular, deve-se salientar que a matéria nuclear pode ser bem descrita através de modelos efetivos nos quais são considerados apenas os graus de liberdade dos núcleons. O sucesso dos modelos efetivos deve-se ao fato que as escalas de energia dos quarks não

serem grandemente relevantes em comparação às escalas típicas de energia nuclear. No início da década de 70, modelos efetivos passaram a ser propostos para a descrição da matéria hadrônica através de teorias relativísticas de campos médios. Como tais modelos são efetivos, estes possuem parâmetros a serem ajustados através de dados experimentais referentes às propriedades da matéria nuclear.

Uma teoria relativística de campos médios (Serot e Walecka, 1986) é covariante e leva em conta apenas os graus de liberdade hadrônicos que, de fato, são os mais importantes na escala de densidades considerada. Nesse modelo, os bárions interagem entre si através da troca dos mésons  $\sigma$  e  $\omega$  aos quais correspondem, respectivamente, as componentes atrativa e repulsiva da força forte. Além de descrever bem propriedades de partícula única do núcleo finito, também apresenta bom desempenho na descrição das propriedades globais da matéria nuclear (*bulk nuclear matter*), relevantes no estudo de estrelas de nêutrons. As constantes de acoplamento do modelo são determinadas de modo a reproduzirem as energias de ligação por núcleon e a densidade de saturação da matéria nuclear. Um terceiro méson  $\rho$ , é inserido na teoria para reproduzir a energia de simetria da matéria nuclear, a qual favorece estados com mínima diferença entre o número de prótons e de nêutrons.

A introdução de bárions mais pesados, os híperons, se faz necessária para densidades maiores do que a de saturação nuclear. Infelizmente, essas partículas não aparecem em densidades próximas da densidade de saturação, o que dificulta a análise de suas propriedades. Algumas suposições deverão ser feitas para encontrar as constantes de acoplamento associadas à interação dos híperons com os mésons  $\sigma$ ,  $\omega$  e  $\rho$ .

Este capítulo inicia com uma breve discussão acerca do histórico do estudo da matéria nuclear e de suas propriedades. Após essa introdução, parte-se para a descrição dos dois modelos hadrônicos que serão utilizados ao longo deste trabalho.

## 4.1 Propriedades de matéria nuclear

Deseja-se descrever a matéria de estrelas de nêutrons através de modelos da hadrodinâmica quântica (HDQ). Porém, essa matéria é ainda mais densa do que a matéria nuclear, sendo necessário que os modelos sejam de alguma forma parametrizados de modo que possam ser extrapolados para altas densidades. As forças responsáveis pela coesão das estrelas de nêutrons são a força gravitacional e a força nuclear, e descrever tais estrelas,

portanto, significa descrever a matéria nuclear em um estado de altíssima densidade. A força nuclear tem curto alcance e apresenta o caráter de saturação. Isso significa que um núcleon presente em um sistema nuclear sentirá uma densidade central  $\rho_0$  que independe de quantos núcleons estejam presentes no sistema. Neste ponto, o sistema terá pressão nula e é chamado de densidade de saturação.

Sendo assim, modelos teóricos podem ser ancorados nas propriedades da matéria nuclear no regime de saturação de modo a descrever a matéria nuclear infinita. São muitas as propriedades da matéria nuclear que terão relevância para a construção desses modelos. Dentre elas, a energia de ligação por núcleon nos permitirá determinar a densidade de saturação e a densidade de energia na saturação, propriedades importantes na obtenção das constantes de acoplamento dos modelos. O coeficiente de simetria nos permitirá fazer uma extrapolação adequada para sistemas assimétricos como estrelas de nêutrons. Por fim, o módulo de compressibilidade e a massa efetiva do núcleon serão úteis na descrição do comportamento da equação de estado para altas densidades

A energia de ligação foi conhecida historicamente como um defeito de massa, significando que a massa total de um sistema é menor que a soma das massas dos componentes do sistema. Isso significa que existe uma energia residual em sistemas nucleares que faz com que estes sejam mais ligados e, portanto, mais estáveis. A determinação empírica da energia de ligação de núcleos atômicos é feita, por exemplo, através da medida da massa espectroscópica destes ou através de reações nucleares no qual a energia de ligação da maioria dos núcleos envolvidos é conhecida (Povh et al., 2006).

A fórmula de Weizsacker, ou fórmula semi-empírica de massa, foi introduzida em 1935 (Weizsäcker, 1935; Bethe e Bacher, 1936) como uma forma de parametrizar a massa nuclear como uma função do número de massa  $A$  (número total de núcleons no sistema) e do número atômico  $Z$  (número total de prótons no sistema). A partir da fórmula semi-empírica de massa, pode-se escrever a energia de ligação pela expressão:

$$B(A, Z) = -a_1A + a_2A^{2/3} + a_3Z^2A^{-1/3} + a_4(A - 2Z)^2A^{-1} \quad (4.1)$$

onde os termos  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  e  $a_4$  serão associados respectivamente ao volume, à superfície nuclear, à interação coulombiana e à assimetria entre o número de prótons e nêutrons dos sistema. Atualmente, com a grande quantidade de dados experimentais, são considerados termos adicionais na fórmula semi-empírica de massa, porém, para a nossa abordagem no

que diz respeito à matéria nuclear infinita a altas densidades, apenas esses quatro termos serão relevantes (Glendenning, 2000).

Os termos da expressão acima devem-se à relação de proporcionalidade entre o raio nuclear  $R$  e o número de massa ser  $R \sim A^{1/3}$ . Essa relação é oriunda da geometria do núcleo atômico, sendo este aproximado como uma esfera homoganeamente carregada (Povh et al., 2006), com  $\rho_0 \sim cte$ , logo  $R = r_0 A^{1/3}$ . Assim, as proporções de  $A$  e  $Z$  na expressão para a energia de ligação podem ser obtidas considerando (Schechter, 2007):

- Termo de Volume: Considerando, por simplicidade, que o volume total  $V$  é dado pela contribuição do volume de cada núcleon individual  $v$ , temos que  $V = A v$ . Como o caráter saturado da força nuclear dita que a densidade central será constante, temos que a energia proveniente do termo de volume deve ser proporcional ao número atômico  $A$ .
- Termo de Superfície: Os núcleons presentes na superfície terão menos vizinhos que os mais internos, contribuindo para uma diminuição da energia do sistema, que será proporcional à área da superfície do núcleo,  $R^2$ . Escrevendo em termos do número de massa, a energia proveniente do termo de superfície será proporcional à  $A^{2/3}$ .
- Termo Coulombiano: Surge da presença de prótons no interior do núcleo. Como a carga dos prótons é positiva, há uma repulsão entre eles, diminuindo a energia de ligação. Em uma esfera uniformemente carregada, a energia coulombiana é proporcional à carga ao quadrado e inversamente proporcional ao raio da esfera, ou  $Z(Z - 1)/R$  e, de forma aproximada, à  $Z^2/A^{1/3}$ .
- Termo de Simetria: Conforme consideramos núcleos com maior número de prótons (maior  $Z$ ), a repulsão coulombiana se torna cada vez mais relevante. Para que essa repulsão seja compensada pela atração nuclear, a quantidade de nêutrons presentes no sistema aumenta, gerando uma assimetria entre prótons e nêutrons. Quanto maior for a simetria de isospin, mais ligado será o núcleo, ou seja, núcleos simétricos são favorecidos energeticamente. Além disso, dados experimentais indicam que a energia de simetria será inversamente proporcional ao número atômico  $A$ , o que significa dizer que para núcleos com a mesma razão  $N/Z$ , aqueles que possuírem um maior número de partículas, será mais ligado. Assim, considerando uma assimetria dada

por  $(N - Z)^2$  e a proporção com  $A$ , temos que a energia de simetria será proporcional à  $(A - 2Z)^2 A^{-1}$ .

A fórmula semi-empírica de massa recebe esse nome pois os valores dos coeficientes presentes nela são obtidos através do ajuste de valores experimentais de massas de núcleos atômicos. Esses coeficientes podem ser obtidos em Myers e Swiatecki (1969) ou Schechter (2007) e estão representados na Tabela 4.1:

Tabela 4.1 - Coeficientes da Fórmula de Weizsacker.

Coeficiente	Valor (MeV)
$a_1$	16.0
$a_2$	17.8
$a_3$	0.710
$a_4$	32.5

Contudo, temos o interesse de fazer a extrapolação para a matéria nuclear infinita, que corresponde a um estado hipotético da matéria nuclear no qual  $A \rightarrow \infty$  e não há interação eletromagnética. Consideremos ainda que essa matéria é simétrica, ou seja,  $N = Z$ , de modo que sua energia de ligação por núcleon será dada por:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \frac{B(A, Z)}{A} \right]_{Z=A/2} \equiv \frac{B}{A} = -a_1 = -16.0 \text{ MeV} \quad (4.2)$$

onde o único coeficiente restante corresponde ao termo de volume.

Através de dados experimentais provenientes do espalhamento elétron-núcleon, determinou-se o valor do parâmetro  $r_0 = 1.12 \text{ fm}$  (Povh et al., 2006). Considerando que a densidade de saturação corresponderá à densidade de um núcleo sobre seu próprio volume (e fazendo a aproximação de núcleons como partículas esféricas de raio  $r_0$ ), a determinação do parâmetro  $r_0$  possibilita o cálculo da densidade de saturação  $\rho_0$ :

$$\rho_0 = \frac{1}{(4\pi/3)r_0^3} = 0.17 \text{ fm}^{-3}. \quad (4.3)$$

Sabendo o valor da densidade de saturação e a energia de ligação por núcleon, podemos determinar a densidade de energia na saturação, para a matéria nuclear simétrica através de:

$$\frac{B}{A} \sim \left( \frac{\epsilon}{\rho} \right)_0 - m, \quad (4.4)$$

onde  $m = 938.3 \text{ MeV}$  corresponde à massa de repouso do núcleon, logo:

$$\epsilon_0 = 156.7 \text{ MeV}/\text{fm}^3 \quad (4.5)$$

As propriedades da matéria nuclear na saturação serão importantes para a determinação das constantes de acoplamento dos modelos, a partir das quais as equações de estado serão parametrizadas.

Quando tratamos de matéria de estrelas de nêutrons devemos levar em consideração que estas serão sistemas altamente assimétricos e que tal assimetria terá implicações em sua estrutura. A extrapolação para a matéria nuclear infinita assimétrica levará em conta o coeficiente do termo de simetria  $a_4$  e, para que o modelo usado seja consistente, este deverá ser capaz de reproduzir o coeficiente de energia de simetria.

Pode-se escrever o coeficiente  $a_4$  em termos de  $\epsilon/\rho$ . Para tanto, definimos  $t \equiv (N - Z)/A = (\rho_n - \rho_p)/\rho_B$  na expressão para  $B(A, Z)/A$  e aplicar o limite de matéria nuclear infinita  $A \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \frac{B(A, Z)}{A} \right] \equiv \frac{B}{A} = -a_1 + a_4 t^2 \quad (4.6)$$

A seguir, utilizando a aproximação para  $B/A$ , temos:

$$a_4 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 (\epsilon/\rho)}{\partial t^2} \right]_{t=0}, \quad (4.7)$$

onde tomamos  $t = 0$  ao final do cálculo de modo a ser feita a conexão com a matéria simétrica.

Outra importante propriedade da matéria nuclear é o módulo de compressibilidade  $K$ , que corresponde à “resposta” do sistema à perturbações ao seu estado de equilíbrio. Quanto maior for o valor de  $K$ , maior será a energia necessária para tirar o sistema do equilíbrio e mais facilmente este retornará a sua configuração original. O módulo de compressibilidade será relacionado à concavidade da equação de estado na saturação:

$$K = \left[ k^2 \frac{d^2}{dk^2} \left( \frac{\epsilon}{\rho} \right) \right]_{k=k_F}, \quad (4.8)$$

onde  $k$  corresponde ao momentum linear e  $k_F$  corresponde ao momentum de Fermi do sistema, ou seja, o momentum linear máximo que uma partícula do sistema pode adquirir.



Atualmente existe uma grande incerteza relacionada ao valor que  $K$  deve assumir. Estimativas do seu intervalo de valores possíveis são provenientes de análises de ressonâncias gigantes monopolares, que são os modos de oscilação radiais do núcleo, e implicam valores entre  $200 - 300 \text{ MeV}$  (Blaizot, 1980; Krivine et al., 1980; Glendenning, 1988a; Sharma et al., 1988). Dados experimentais mais recentes indicam que esse valor seja por volta de  $K = 234 \text{ MeV}$  (Myers e Swiatecki, 1996).

Finalizando a revisão das propriedades da matéria nuclear, devemos considerar a massa efetiva do núcleon. Essa massa efetiva resulta da interação dos núcleons com os mésons escalares, responsáveis pela componente atrativa da força nuclear e dependerá da densidade ou do momentum de Fermi do sistema:  $m^* = m^*(k_F)$ .

Assim como o módulo de compressibilidade, a massa efetiva do núcleon possui uma incerteza considerável em seu valor na densidade saturação. Um intervalo de valores é obtido através do espalhamento de nêutrons em núcleos de chumbo, apontando um intervalo entre  $0.70 - 0.78$  para  $m^*/m$  (Glendenning, 1988b).

O módulo de compressibilidade e a massa efetiva do núcleon são propriedades da matéria nuclear fortemente relacionadas ao comportamento da equação de estado à altas densidades. Essas propriedades determinam se a equação de estado será rígida ou suave no limite de altas densidades, características que afetarão diretamente as propriedades de estrelas de nêutrons descritas por qualquer modelo da hadrodinâmica quântica.

## 4.2 Equações de Estado

Segundo Shapiro e Teukolsky (2008), a teoria dos objetos compactos envolve duas categorias distintas de física, sendo elas as propriedades globais e as locais do objeto. As propriedades globais descrevem a resposta da matéria à gravidade, campos eletromagnéticos e rotação, são os efeitos em larga escala e são governadas pelas equações de movimento da matéria. Já as propriedades locais podem ser entendidas como o estado termodinâmico local de um elemento individual de matéria e lida com a microfísica necessária para descrever o objeto em termos da matéria hadrônica, e no caso das estrelas abordadas neste estudo, em regimes abaixo do “*neutron drip*”<sup>1</sup>, definido aproximadamente na faixa abaixo

<sup>1</sup> Expressão sem tradução definida, se refere à densidade crítica onde é energeticamente mais favorável que os nêutrons saiam do núcleon criando um fluido.

de  $\approx 4 \times 10^{11} g cm^{-3}$ .

A discussão da matéria nuclear na seção anterior leva diretamente à equação de estado do sistema. A equação de estado é uma ferramenta de extrema importância no estudo das transições de fase da matéria nuclear e de nêutrons. Sua determinação também é de particular importância para o cálculo da estrutura interna das estrelas através das equações TOV (Sec.3.2), com vistas à determinação de propriedades globais das estrelas de nêutrons. Nesta subseção, vamos discutir resumidamente as propriedades das equações de estado SWRDP (Seção 4.2.4) e BPS (Seção 4.2.5) que serão utilizadas na montagem das equações de estado híbridas no Capítulo 7.

#### 4.2.1 Modelo do gás de Fermi

Uma aproximação comum na descrição das estrelas compactas é o gás de fermions para núcleons e elétrons. Os detalhes da dedução podem ser encontrados em Shapiro e Teukolsky (2008).

Expõe-se a seguir alguns dos princípios envolvidos em qualquer cálculo que diga respeito à estrutura de uma estrela compacta, seja ela estrela de nêutrons ou anã branca. Consideremos uma idealização em que as estrelas compactas fazem parte de uma sequência de formação conduzida por uma equação de estado ‘simples’. Esta equação de estado descreve um gás de nêutrons, prótons e elétrons não interagentes cuja proporção para a densidade bariônica seja tal que o gás tenha sua mais baixa energia possível. Tal situação é chamada de equilíbrio  $\beta$ . Os nêutrons não sofrem decaimento  $\beta$  nem reação inversa (captura de um elétron por um próton). Portanto, a energia mínima está sujeita à condição de neutralidade de carga do gás. Uma vez que nêutrons, prótons e elétrons são férmions (partículas de spin semi-inteiro), e obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, existe no sistema apenas um férmion por estado quântico; temos então o chamado gás ideal de Fermi degenerado. Significa que todos os estados quânticos, até um nível de energia chamado nível de Fermi, são ocupados. Somando os estados de ocupação, que na ausência de interações são auto-estados de momentum linear, temos que

$$\frac{1}{L^3} \sum_k \dots \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \dots = \frac{1}{2\pi^2} \int k^2 dk \dots \quad (4.9)$$

onde  $k = |\mathbf{k}|$  é o número de onda. O momentum de uma partícula  $p$  e o número de

onda são relacionados por:  $p = \hbar k$ .

A premissa da degenerescência dos férmions é válida para baixas temperaturas (muito menores do que a energia de Fermi,  $T \ll E_F = \sqrt{k_F^2 + M^2}$ . Para elétrons,  $E_F > M_e = 0.511 \text{ MeV} \approx 6 \times 10^9 K$  (como referência, a temperatura de uma anã branca está entre  $10^6$  a  $10^7 K$ ). Portanto, a energia dos elétrons e, conseqüentemente, dos núcleons, satisfaz a condição de degenerescência. Neste modelo, cada tipo de férmion do sistema (n, p, e) contribui para a densidade de energia, pressão e densidade fermiônica, de acordo com:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^k k^2 \sqrt{k^2 + m^2} dk \\ p &= \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^k k^2 \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk \\ \rho &= \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^k k^2 dk\end{aligned}\quad (4.10)$$

onde  $\gamma$  representa a degenerescência de cada estado de momentum. A degenerescência é igual a 2 para cada tipo de partícula, correspondendo às duas projeções de spin  $\pm 1/2$ . O limite superior da integração é o momentum de Fermi,  $k_F$ .

Resolvendo as integrais, obtemos

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{1}{4\pi^2} \left[ \mu k \left( \mu^2 - \frac{1}{2} m^2 \right) - \frac{1}{2} m^4 \ln \left( \frac{\mu + k}{m} \right) \right] \\ p &= \frac{1}{12\pi^2} \left[ \mu k \left( \mu^2 - \frac{5}{2} m^2 \right) + \frac{3}{2} m^4 \ln \left( \frac{\mu + k}{m} \right) \right] \\ \rho &= \frac{k^3}{3\pi^2}\end{aligned}\quad (4.11)$$

onde

$$\mu = \sqrt{m^2 + k^2} \quad (4.12)$$

é a energia de Fermi e  $k$  é o momento de Fermi. Eliminando  $k$  nas equações, pode-se obter a equação de estado  $n - p - e$  parametrizada por  $\rho$ . Fazendo as aproximações apropriadas (Glendenning, 2000), obtém-se a equação de estado no limite das altas e baixas densidades. Na Figura 4.1 é mostrada a equação obtida em comparação com o modelo BPS (Seção 4.2.5).

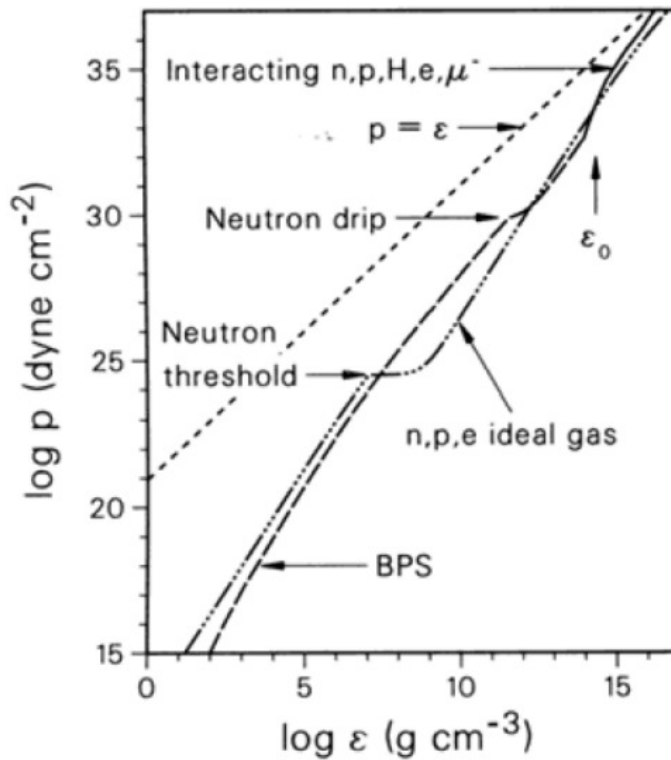


Figura 4.1: Equação de estado do gás de Fermi do sistema (n,p,e) em equilíbrio  $\beta$ . É também mostrada a equação de estado BPS (Seção 4.2.5) (Glendenning, 2000).

#### 4.2.2 Modelo $\sigma - \omega$ de Walecka

John Dirk Walecka propôs uma teoria de campos relativísticos (Walecka, 1974), antecedida em trabalhos de Johnson e Teller (1955) e Duerr (1956), descrevendo um sistema nuclear de muitos corpos. No modelo de Walecka, os núcleons são representados pelo lagrangeano de Dirac (porque são férmions), pelo campo  $\psi$  e têm massa  $M$ . O méson  $\sigma$  é representado pelo lagrangeano de Klein-Gordon (porque é um bóson de spin nulo), pelo campo  $\sigma$  e tem massa  $m_\sigma$ . O méson  $\omega$  é representado pelo lagrangeano de Proca (porque é um bóson vetorial), pelo campo  $\omega$  e tem massa  $m_\omega$ . As principais características desses campos estão mostradas na Tabela 4.2. Os campos pertencentes a tal formalismo são caracterizados a partir de seu comportamento sob as transformações de Lorentz. Uma abordagem clara sobre o assunto encontra-se compilada por Bjorken e Drell (1964), classificando os campos de acordo com a sua estrutura.

Baseado empiricamente no comportamento das interações entre núcleons, o potencial nuclear é descrito, nesse modelo, através da troca de mésons escalares, responsáveis

Tabela 4.2 - Características das partículas presentes no modelo de Walecka.

Partícula	Campo	Classificação de	Massa (MeV)
$\sigma$	$\sigma$	escalar-isoescalar	600
$\omega$	$\omega$	vetor-isoescalar	782
$\rho$	$\rho$	vetor-isovetor	770
Núcleons	$\psi$	espinor	1020

pela atração nuclear de longo alcance, e vetoriais, responsáveis pela repulsão nuclear de curto alcance. Esse potencial está representado, na formulação de Yukawa, no limite não-relativístico, por

$$V_{eff}(r) = \frac{g_\omega^2}{4\pi} \frac{e^{-m_\omega r}}{r} - \frac{g_\sigma^2}{4\pi} \frac{e^{-m_\sigma r}}{r}. \quad (4.13)$$

A obtenção do modelo de Walecka está fora do escopo desta tese. Uma discussão detalhada pode ser obtida em Schmitt (2010). As Eqs. (4.14) e (4.17) nos dão a equação de estado parametrizada por  $k_F$ , que por sua vez é função da densidade bariônica  $\rho_B$ .

$$P = \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} n_B^2 - \frac{1}{2} \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} n_s^2 + \frac{1}{4\pi^2} \left[ \left( \frac{2}{3} k_F^3 - (m_N^*)^2 k_F \right) E_F^* + (m_N^*)^4 \ln \frac{k_F + E_F^*}{m_N^*} \right] \quad (4.14)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} n_B^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} n_s^2 + \frac{1}{4\pi^2} \left[ (2k_F^3 + (m_N^*)^2 k_F) E_F^* - (m_N^*)^4 \ln \frac{k_F + E_F^*}{m_N^*} \right] \quad (4.15)$$

com a energia de Fermi definida como

$$E_F^* = \mu^* = \sqrt{k_F^2 + (m_N^*)^2}, \quad (4.16)$$

e as densidades em temperatura zero são dadas por

$$n_B = \frac{2k_F^3}{3\pi^2}, \quad (4.17)$$

$$n_s = \frac{m_N^*}{\pi^2} \left[ k_F E_F^* - (m_N^*)^2 \ln \frac{k_F + E_F^*}{m_N^*} \right]. \quad (4.18)$$

e  $m_N$  é a massa efetiva do núcleon.

### 4.2.3 Modelo ZM

Em 1990, Zimanyi e Moszkowski (1990) propuseram a troca do acoplamento mínimo de Yukawa entre o méson escalar e os núcleons por um acoplamento derivativo. A curva de saturação continua sendo reproduzida pelo modelo ZM, mas agora os resultados para a massa efetiva e a incompressibilidade estão dentro da faixa experimental. Isso sem o custo de parâmetros físicos extras a serem determinados como no modelo não-linear de Walecka.

Em seu artigo original, os autores do modelo ZM apresentaram ainda mais duas variações que poderiam ser consideradas no espírito do acoplamento derivativo. Esses três modelos ficaram conhecidos na literatura como ZM, ZM2 e ZM3. O segundo deles não apresenta diferenças fundamentais em relação ao ZM3 e, ao contrário dos modelos ZM e ZM3, não pode ser visto como um modelo de Walecka com reescalamento das constantes de acoplamento; por isso, não iremos abordar o modelo ZM2 no presente trabalho. As densidades lagrangeanas dos modelos ZM e ZM3 são:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ZM} = & -\bar{\psi}M\psi + (m^*)^{-1} [\bar{\psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\psi - g_\omega\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\omega^\mu] \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - m_\sigma^2\sigma^2) - \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ZM3} = & -\bar{\psi}M\psi + (m^*)^{-1}\bar{\psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\psi - g_\omega\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\omega^\mu \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - m_\sigma^2\sigma^2) - \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu, \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde,

$$m^* \equiv \left(1 + \frac{g_\sigma\sigma}{M}\right)^{-1}. \quad (4.21)$$

Assim, se expandirmos  $m^*$  nas expressões acima, veremos que o que se fez em essência foi trocar o acoplamento mínimo de Yukawa,  $g_\sigma \bar{\psi} \sigma \psi$ , por um acoplamento derivativo  $(g_\sigma/M) \bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi$ .

Podemos reescalonar os campos dos núcleons da seguinte forma:

$$\psi \rightarrow \sqrt{m^*} \psi. \quad (4.22)$$

Com isso, os lagrangeanos resultantes podem ser colocados na forma geral:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega^* \omega^\mu) - (M - g_\sigma \sigma)] \psi \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu, \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde temos a seguinte correspondência:

$$\begin{aligned} \text{Walecka : } & g_\sigma^* \rightarrow g_\sigma \quad g_\omega^* \rightarrow g_\omega \\ \text{ZM : } & g_\sigma^* \rightarrow m^* g_\sigma \quad g_\omega^* \rightarrow g_\omega \\ \text{ZM3 : } & g_\sigma^* \rightarrow m^* g_\sigma \quad g_\omega^* \rightarrow m^* g_\omega \end{aligned} \quad (4.24)$$

As equações de movimento que seguem daí são:

$$[i\gamma_\mu \partial^\mu - (M - g_\sigma^* \sigma) - g_\omega^* \gamma_\mu \omega^\mu] \psi = 0, \quad (4.25)$$

$$\partial_\nu \omega^{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega^\mu = g_\omega^* \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (4.26)$$

$$(\partial_\nu \partial^\nu + m_\sigma^2) \sigma = -\frac{\partial(g_\sigma^* \sigma)}{\partial \sigma} \bar{\psi} \psi - \frac{\partial g_\sigma^*}{\partial \sigma} \bar{\psi} \omega_\nu \gamma^\nu \psi, \quad (4.27)$$

as quais, na aproximação de campo médio, ficam:

$$g_\omega \omega_0 = \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho, \quad (4.28)$$

$$g_\sigma \sigma = \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \left[ -\frac{1}{g_\sigma} \frac{\partial(g_\sigma^* \sigma)}{\partial \sigma} \right] \rho_S, \quad (4.29)$$

para o modelo ZM e

$$g_\omega \omega_0 = m^* \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho, \quad (4.30)$$

$$g_\sigma \sigma = \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \left[ -\frac{1}{g_\sigma} \frac{\partial(g_\sigma^* \sigma)}{\partial \sigma} \rho_S - m^* \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \frac{1}{g_\sigma g_\omega} \frac{\partial g_\omega^*}{\partial \sigma} \rho^2 \right], \quad (4.31)$$

para o modelo ZM3. Nota-se a peculiaridade do modelo ZM3: o acoplamento entre os mésons escalares e vetoriais, o que não aparece nos outros modelos (Walecka e ZM). A densidade de energia e a pressão têm as mesmas expressões dadas para o modelo de Walecka (Eqs. (4.14) e (4.17)), mas substituindo  $g_\sigma$  por  $g_\sigma^*$ .

#### 4.2.4 Modelo $\sigma - \omega - \rho - \delta - \phi$ (SWRDP)

A equação de estado SWRDP (acrônimo para os mésons  $\sigma$ (S),  $\omega$ (W),  $\rho$ (R),  $\delta$ (D) e  $\phi$ (P)) desenvolvida por Gomes et al. (2015) é baseada no modelo de acoplamento derivativo ajustável proposto por Taurines et al. (2001). O modelo de acoplamento ajustável é generalizável através de um conjunto de modelos parametrizados pelas propriedades da matéria nuclear. O mesmo considera uma densidade lagrangiana que inclui o octeto bariônico, léptons e os mésons  $\sigma$  (isoescalar-escalar),  $\omega$  (isoescalar-vetorial) e  $\rho$  (isovetorial-vetorial).

Já o modelo SWRDP é uma tentativa, a partir do trabalho citado, de unificar o modelo  $\sigma - \omega$  de Walecka (1974)(Seção 4.2.2) e ZM de Zimanyi e Moszkowski (1990)(Seção 4.2.3). O modelo considera um acoplamento derivativo parametrizado que simula as forças de muitos corpos pela inclusão de auto-interações não lineares e termos de interação méson-méson para os mésons escalares na densidade lagrangiana da teoria, reproduzindo com sucesso as propriedades da matéria nuclear e tendo sido aplicado em diferentes tópicos como compressibilidade da matéria nuclear (Dexheimer et al., 2008), transições de fase hádron-quark (Burigo et al., 2010), condensação de kaons (Razeira et al., 2011) e efeitos dos campos magnéticos em estrelas de nêutrons (Gomes et al., 2014b,a).

O modelo inclui o conjunto completo de mésons relevantes na escala de energia e aproximação de campo médio: escalar-isoescalar( $\sigma, \sigma^*$ ), vetor-escalar( $\omega, \phi$ ), vetor-isovetor( $\rho$ ) e escalar-isovetor( $\delta$ ). Segundo os autores, os mésons  $\rho$  e  $\delta$  são importantes na descrição das estrelas de nêutrons devido à alta assimetria de isospin dos campos. Além disso, os mésons



$\phi$  e  $\sigma^*$  são importantes na descrição das interações híperon-híperon.

O modelo leva em conta as contribuições à força nuclear pela introdução do conceito de “naturalidade”<sup>2</sup> e um acoplamento derivativo para os mésons. Além disso, são introduzidos graus de liberdade mesônicos  $\delta$ ,  $\sigma^*$  e  $\phi$ . O méson  $\delta$  é introduzido para melhor descrição das propriedades da matéria assimétrica, enquanto os mésons estranhos ( $\sigma^*$  e  $\phi$ ) desempenham um importante papel nas interações hiperônicas. A densidade lagrangiana do modelo é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \sum_b \bar{\psi}_b \left[ \gamma_\mu \left( i\partial^\mu - g_{\omega b \xi}^* \omega^\mu - g_{\phi b \kappa}^* \phi^\mu - \frac{1}{2} g_{\varrho b \eta}^* \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varrho}^\mu \right) \right. \\
& \left. - \left( 1 + \frac{g_{\sigma b} \sigma + g_{\sigma^* b} \sigma^* + \frac{1}{2} g_{\delta b} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\delta} \right)^{-\zeta} m_b \right] \psi_b \\
& + \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2 \right) + \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma^* \partial^\mu \sigma^* - m_{\sigma^*}^2 \sigma^{*2} \right) \\
& + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \phi_{\mu\nu} \phi^{\mu\nu} + m_\phi^2 \phi_\mu \phi^\mu \right) \\
& + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varrho}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\varrho}^{\mu\nu} + m_\varrho^2 \boldsymbol{\varrho}_\mu \cdot \boldsymbol{\varrho}^\mu \right) + \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \boldsymbol{\delta} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\delta} - m_\delta^2 \boldsymbol{\delta}^2 \right) \\
& + \sum_l \bar{\psi}_l \gamma_\mu (i\partial^\mu - m_l) \psi_l.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Os subscritos  $b$  e  $l$  rotulam, respectivamente, os graus de liberdade do octeto bariônico ( $n$ ,  $p$ ,  $\Lambda^0$ ,  $\Sigma^-$ ,  $\Sigma^0$ ,  $\Sigma^+$ ,  $\Xi^-$ ,  $\Xi^0$ ) e leptônico ( $e^-$ ,  $\mu^-$ ). O primeiro e último termos representam a densidade lagrangiana de Dirac para bárions e léptons respectivamente. Os outros termos representam as densidades lagrangianas para mésons, onde foi assumido uma densidade lagrangiana do tipo Klein-Gordon para os campos escalares  $\sigma$ ,  $\delta$  e  $\sigma^*$  e uma densidade lagrangiana do tipo Proca para os campos vetoriais  $\omega$ ,  $\varrho$  and  $\phi$ . O acoplamento méson-bárion é introduzido através das constantes de acoplamento presentes no primeiro termo da equação (4.32). Os operadores  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  representam as matrizes de isospin de Pauli. Outra característica é que o sistema possui assimetria de isospin pelo acoplamento dos campos  $\delta$  e  $\varrho$  ao escalar isospin-dependente ( $\rho_s = \bar{\psi} \boldsymbol{\tau} \psi$ ) e densidades vetoriais ( $\rho_b = \psi^\dagger \boldsymbol{\tau} \psi$ ).

As propriedades dos bárions, mésons e léptons estão descritas nas tabelas (4.3) e (4.4).

<sup>2</sup> Do inglês *naturalness*, propriedade que considera que parâmetros livres ou constantes físicas de uma teoria devem ter valores relativos “de ordem 1”.

Tabela 4.3 - Propriedades dos bárions e léptons. As linhas indicam diferentes partículas e  $I^3$ ,  $q_b$ ,  $q_e$  e  $s$  indicam projeção de isospin na direção  $z$ , carga bariônica, carga elétrica e estranheza, respectivamente.

Partícula	Massa (MeV)	$I^3$	$q_b$	$q_e$	$s$
$p$	939.6	1/2	1	+1	0
$n$	938.3	-1/2	1	0	0
$\Lambda$	1116	0	1	0	-1
$\Sigma^+$	1189	+1	1	+1	-1
$\Sigma^0$	1193	0	1	0	-1
$\Sigma^-$	1197	-1	1	-1	-1
$\Xi^0$	1315	+1/2	1	0	-2
$\Xi^-$	1321	-1/2	1	-1	-2
$e^-$	0.511	0	0	-1	0
$\mu^-$	105.7	0	0	-1	0

Tabela 4.4 - Campos mesônicos considerados no modelo SWRDP.

Méson	Partícula	Classificação	Constante de acoplamento	Massa (MeV)
$\sigma$	$\sigma$	escalar-isoescalar	$g_{\sigma b}$	550
$\delta$	$a_0$	escalar-isovetor	$g_{\delta b}$	980
$\omega_\mu$	$\omega$	vetor-isoescalar	$g_{\omega b}$	782
$\rho_\mu$	$\rho$	vetor-isovetor	$g_{\rho b}$	770
$\sigma^*$	$f_0$	escalar-isoescalar	$g_{\sigma^* b}$	975
$\phi_\mu$	$\phi$	vetor-isoescalar	$g_{\phi b}$	1020

A definição geral para o acoplamento méson-bárion é dado por:

$$g_{\omega b \xi}^* \equiv m_{\xi b}^* g_{\omega b}, \quad g_{\rho b \kappa}^* \equiv m_{\kappa b}^* g_{\rho b}, \quad g_{\phi b \eta}^* \equiv m_{\eta b}^* g_{\phi b}, \quad (4.33)$$

onde o coeficiente paramétrico  $m_{\lambda b}^*$  introduz contribuições não lineares:

$$m_{\lambda b}^* \equiv \left( 1 + \frac{g_{\sigma b} \sigma + g_{\sigma^* b} \sigma^* + \frac{1}{2} g_{\delta b} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\delta}}{\lambda m_b} \right)^{-\lambda}, \quad (4.34)$$

para  $\lambda = \xi, \kappa, \eta, \zeta$ .

Segundo os autores, a motivação principal do formalismo é a introdução do parâmetro de acoplamento derivativo que pode ser expandido em uma série de acoplamentos não

lineares entre os mésons escalares  $\sigma$ ,  $\sigma^*$  and  $\delta$ . Cada termo da expansão corresponde à contribuição do efeito médio das forças de muitos corpos.

Em última análise, a expansão em série completa, controlada pelos parâmetros  $\lambda = \xi, \kappa, \eta, \zeta$ , permitem a descrição genuína de forças de muitos corpos, que são introduzidas como efeitos médios na aproximação de campo médio.

Cada conjunto de parâmetros gera diferentes equações de estado e perfis de população e devem ser analisados de maneira que seja coberto o intervalo de incertezas das propriedades na saturação nuclear. Como os campos mesônicos tem seus valores alterados de acordo com a densidade, as constantes de acoplamento dos mésons escalares apresentam dependência através do acoplamento dos campos.

A abordagem consiste em considerar a *versão escalar* do modelo, onde contribuições não lineares afetam apenas os mésons escalares, i.e.,  $\xi = 0, \kappa = 0, \eta = 0, \zeta \neq 0$ . Vasconcellos et al. (2014) discutem outras possibilidades de parametrização.

A massa efetiva dos bárions, neste modelo é dada por:

$$\begin{aligned} m_{b\zeta}^* &= m_{\zeta b}^* m_b \\ &\equiv \left( 1 + \frac{g_{\sigma b} \sigma + g_{\sigma^* b} \sigma^* + \frac{1}{2} g_{\delta b} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\delta}}{\zeta m_b} \right)^{-\zeta} m_b, \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde pode-se aferir a influência das contribuições não lineares dos mésons escalares, controlado pelo parâmetro  $\zeta$ . Além disso, como a massa efetiva dos bárions depende do parâmetro  $\zeta$ , o potencial químico das partículas interagentes também é afetado por forças de muitos corpos:

$$\mu_b^* = \sqrt{k_{f_b}^2 + (m_{b\zeta}^*)^2} + g_{\omega b} \omega_0 + g_{\rho b} I_{3b} \rho_{03} + g_{\phi b} \phi_0, \quad (4.36)$$

onde  $k_{f_b}$  é o momento de Fermi dos bárions e  $I_{3b}$  é a projeção de isospin bariônica na direção  $z$ .

As equações de campo médio, calculadas a partir da densidade lagrangiana na aproximação de campo médio são dadas por:

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \frac{1}{m_\sigma^2} \sum_b \left[ g_{\sigma b} (m_{\zeta b}^*) \right. \\
&\quad \left. - \frac{g_{\sigma b}}{m_b} (m_{\zeta b}^*)^{\frac{\zeta+1}{\zeta}} (g_{\sigma b} \sigma_0 + g_{\delta b} \delta_0^3 I^{3b} + g_{\sigma_0^* b} \sigma_0^*) \right] \rho_{sb}, \\
\omega_0 &= \frac{1}{m_\omega^2} \sum_b g_{\omega b} \rho_b, \\
\varrho_0^3 &= \frac{1}{m_\varrho^2} \sum_B g_{\varrho b} I^{3b} \rho_b, \\
\delta_0^3 &= \frac{1}{m_\delta^2} \sum_b \left[ g_{\delta b} (m_{\zeta b}^*) \right. \\
&\quad \left. - \frac{g_{\delta b}}{m_b} (m_{\zeta b}^*)^{\frac{\zeta+1}{\zeta}} (g_{\sigma b} \sigma_0 + g_{\delta b} \delta_0^3 I^{3b} + g_{\sigma^* b} \sigma_0^*) \right] I^{3b} \rho_{sb}, \\
\phi_0 &= \frac{1}{m_\phi^2} \sum_b g_{\phi b} \rho_b, \\
\sigma_0^* &= \frac{1}{m_{\sigma^*}^2} \sum_b \left[ g_{\sigma^* b} (m_{\zeta b}^*) \right. \\
&\quad \left. - \frac{g_{\sigma^* b}}{m_b} (m_{\zeta b}^*)^{\frac{\zeta+1}{\zeta}} (g_{\sigma b} \sigma_0 + g_{\delta b} \delta_0^3 I^{3b} + g_{\sigma^* b} \sigma_0^*) \right] \rho_{sb},
\end{aligned} \tag{4.37}$$

onde  $\sigma_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\varrho_0$ ,  $\delta_0$ ,  $\phi_0$  and  $\sigma_0^*$  denotam os valores esperados classicamente dos campos mesônicos.

Conforme a densidade aumenta, é energeticamente mais favorável que o sistema popule novos graus de liberdade para que a energia de Fermi diminua. Em particular, em razão dos processos de interação forte, se prevê que espécies de híperons comecem a se tornar importantes em densidades em torno de  $2 \rho_0$ , onde  $\rho_0$  é a densidade de saturação nuclear.

Considerando que a matéria esteja em equilíbrio  $\beta$ , é possível verificar que as forças de muitos corpos também desempenham papel importante na abundância das partículas, dado que cada espécie é populada de acordo com o seguinte patamar:

$$q_{b_i} \mu_n^* - q_{e_i} \mu_e^* - g_{\omega b} \omega_0 - g_{\varrho b} I_{3b} \varrho_0^3 - g_{\phi b} \phi_0 \geq m_{\zeta b_i}^*, \tag{4.38}$$

onde  $q_{b_i}$  e  $q_{e_i}$  representam cargas bariônicas e elétricas, respectivamente,  $e\mu_n^*$  e  $\mu_e^*$  são os potenciais químicos efetivos do nêutron e elétron, respectivamente.

A equação de estado é calculada a partir dos componentes do tensor de energia-momento, assumindo equilíbrio químico e simetria de isospin e neutralidade de carga.

A inclusão de campos mesônicos adicionais no modelo possui um efeito direto no comportamento da matéria em altas densidades. A presença do méson  $\delta$  também afeta a

assimetria da matéria nuclear na densidade de saturação.

As constantes de acoplamento hiperônicos  $g_{\omega Y}$ ,  $g_{\rho Y}$ ,  $g_{\delta Y}$  and  $g_{\phi Y}$  são definidas pelo uso da simetria spin-sabor do SU(6) (Dover e Gal, 1985; Schaffner et al., 1984) para os mésons vetoriais, como segue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}g_{\omega N} &= \frac{1}{2}g_{\omega\Lambda} = \frac{1}{2}g_{\omega\Sigma} = g_{\omega\Xi}, \\ g_{\rho N} &= \frac{1}{2}g_{\rho\Sigma} = g_{\rho\Xi}, \quad g_{\rho\Lambda} = 0, \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3}g_{\omega N} &= 2g_{\phi\Lambda} = 2g_{\phi\Sigma} = g_{\phi\Xi}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

ainda assumindo *scaling* de isospin para o acoplamento do méson  $\delta$ :

$$g_{\delta N} = \frac{1}{2}g_{\delta\Sigma} = g_{\delta\Xi}, \quad g_{\delta\Lambda} = 0. \quad (4.40)$$

Assim, os acoplamentos hiperônicos para os mésons vetoriais são proporcionais ao número de quarks  $S$  presentes em cada partícula. A regra para o méson isovetorial é dada pela proporção entre o núcleon e o isospin hiperônico. Como exemplo, dado que o híperon  $\Lambda$  é um singlete, o mesmo possui zero isospin e portanto não acopla aos mésons  $\rho$  e  $\delta$ . Já o acoplamento híperon-sigma é obtido associando a interação atrativa entre híperons e núcleons através do ajuste do potencial dos híperons na matéria nuclear (Glendenning e Moszkowski, 1991; Schaffner et al., 1992):

$$U_Y^N = g_{\omega Y}\omega_0(\rho_0) - g_{\sigma Y}\sigma_0(\rho_0), \quad (4.41)$$

onde são utilizados os valores apresentados em Schaffner-Bielich e Gal (2000):

$$U_\Lambda^N = -28 \text{ MeV}, \quad U_\Sigma^N = +30 \text{ MeV} \text{ and } U_\Xi^N = -18 \text{ MeV}.$$

#### O papel do parâmetro $\zeta$ na equação de estado

A equação de estado é obtida através do cálculo do tensor energia momento, como visto na seção anterior. Fixando os parâmetros livres da teoria em termos de valores experimentais e das restrições das propriedades esperadas da matéria nuclear no regime de saturação (para o detalhamento completo, ver seções III e IV de Gomes et al. (2015)), obtém-se a curva da equação de estado da Fig.4.2.

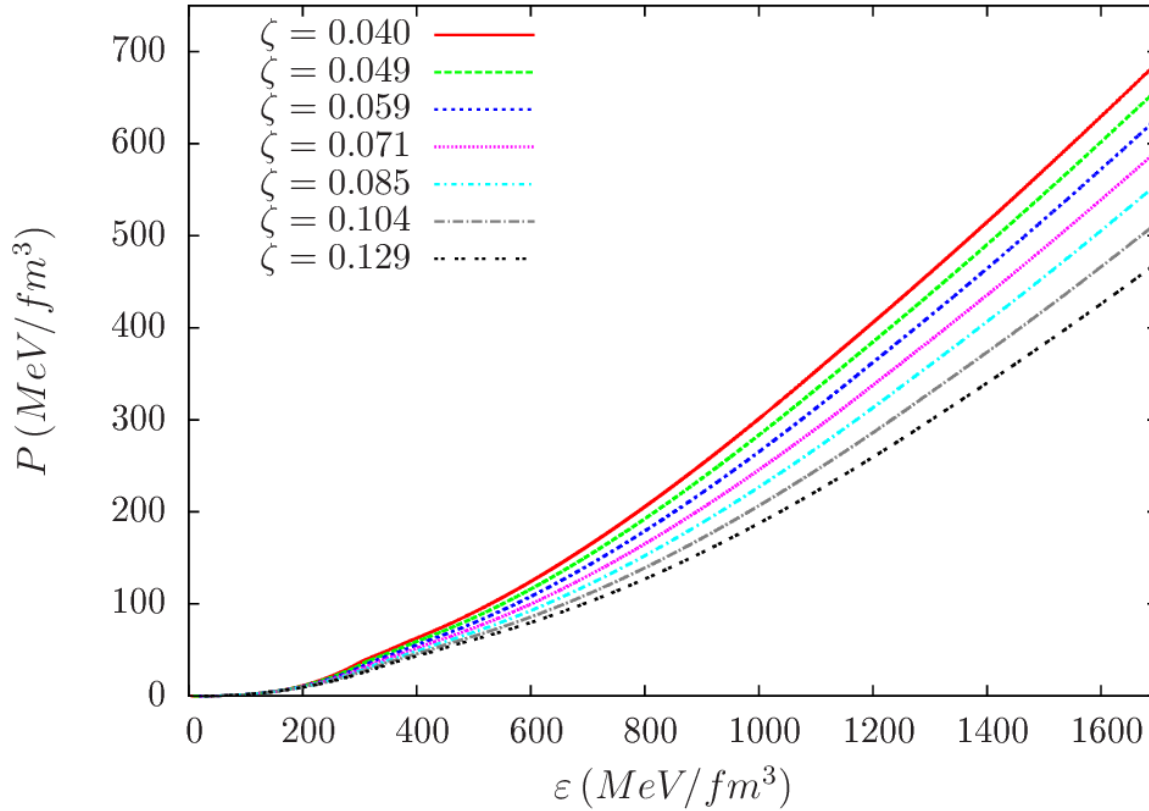


Figura 4.2: Equação de estado SWRDP para matéria estelar e diferentes parametrizações de  $\zeta$  (Gomes et al., 2015).

Os autores também avaliam também a estrutura macroscópica de estrelas descritas pelo modelo em questão, assumindo equilíbrio  $\beta$  e neutralidade local de carga, através do uso das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. O resultado pode ser visto na Fig.4.3.

Percebe-se que menores valores de  $\zeta$  geram equações de estado mais duras, e consequentemente estrelas com maior massa. Uma equação de estado mais dura está relacionada com valores mais altos da pressão interna do sistema e em conformidade com valores mais altos do módulo de compressibilidade da matéria nuclear, que por sua vez requer maiores contribuições das componentes repulsivas da força nuclear.

Nesta abordagem, no entanto, as forças de muitos corpos diminuem as forças tanto dos termos de interação atrativos como dos repulsivos devido a *efeitos de blindagem*, que resultam em altos(baixos) valores do módulo de compressão da matéria nuclear em caso de maior(menor) redução relativa das contribuições atrativas. Os resultados atuais são consistentes com a análise acima, já que foram obtidas EoS mais duras para valores inferiores do parâmetro  $\zeta$ , o que corresponde a repulsão forte. Em resumo, os valores mais baixos do

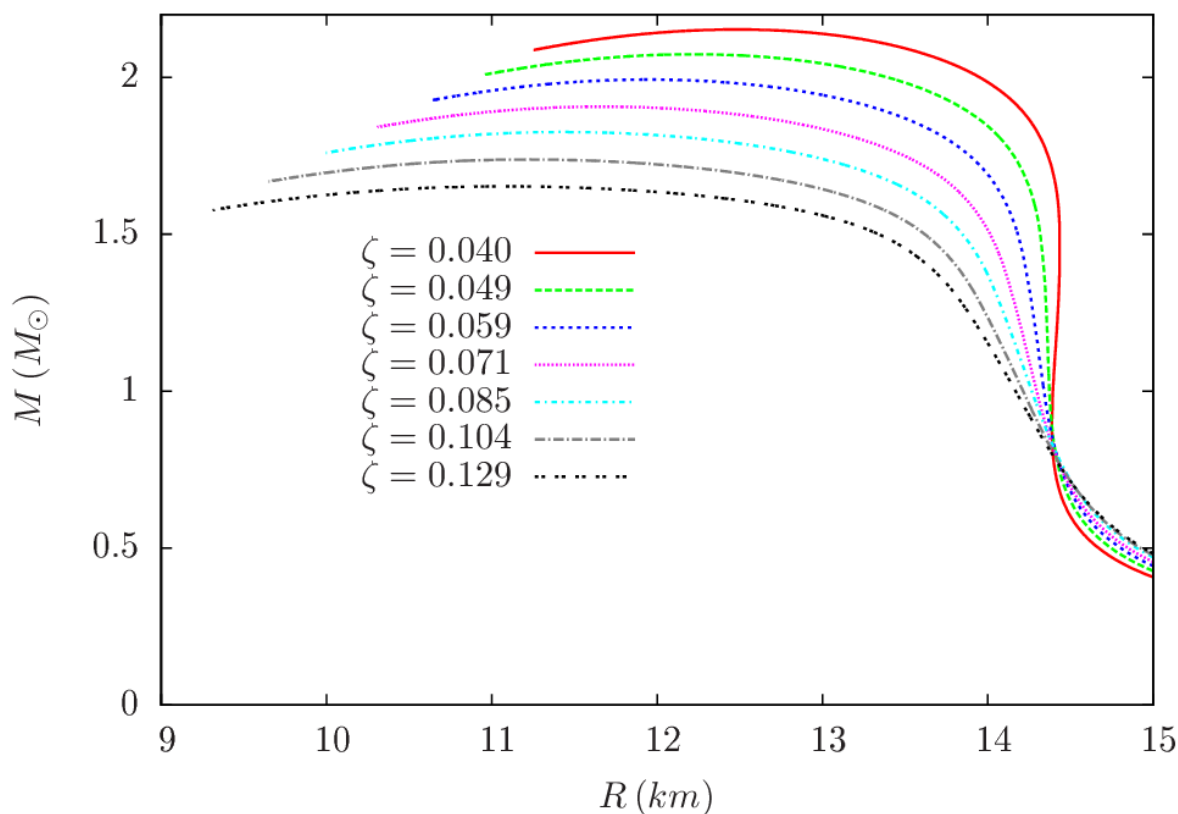


Figura 4.3: Relação massa-raio para estrelas utilizando o modelo SWRDP para diferentes parâmetros  $\zeta$ . (Gomes et al. (2015)).

parâmetro  $\zeta$  geram matéria nuclear mais repulsiva capaz de suportar mais gravidade e, conseqüentemente, criar um objeto macroscópico com maior massa. Outra característica do modelo é que ele perde a validade em densidades mais rarefeitas, da ordem de  $0.01 \text{ fm}^{-3}$ . Na abordagem utilizada neste tese, quando esta densidade é atingida, a equação de estado é trocada pela BPS, que será vista na próxima seção.

#### 4.2.5 Equação de Estado de Baym-Pethick-Sutherland (BPS)

Como explicado na Seção 2.2.2, as estrelas de nêutrons, em sua crosta e densidades abaixo do “*neutron drip*” são satisfatoriamente explicadas pela equação de estado BPS. Baseada no modelo criado por Salpeter (1961), Baym et al. (1971) determinaram que a energia da rede eletrônica (“*lattice*”) dada pela Eq.(4.42)

$$\frac{E_c}{Z} = -\frac{9}{10} \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} Z^{2/3} e^2 n_e^{1/3} \quad (4.42)$$

era importante para determinar a composição do equilíbrio, apesar de ser uma correção pequena na pressão eletrônica. Mesmo assim é uma contribuição importante no sentido de que o equilíbrio é determinado em grande parte pela competição entre a energia de superfície nuclear e a energia coulombiana. Em densidades da ordem de  $10^{11} \text{ g/cm}^3$ , a energia da rede eletrônica reduz a energia coulombiana nuclear positiva por aproximadamente 15%, tendo um efeito na equação de estado (Shapiro e Teukolsky, 2008).

Partindo da densidade de energia proposta por Harrison et al. (1958), com  $Y_i$  sendo definido como a concentração da  $i$ -ésima espécie da partícula tal que  $Y_i \equiv n_i/n$  e

$$\varepsilon = n(1 - Y_m) \frac{M(A, Z)}{A} + \varepsilon'_e(n_e) + e_n(n_n) \quad (4.43)$$

onde

$$n_e = n(1 - Y_n) \frac{Z}{A} e \quad (4.44)$$

$$n_n = n Y_n, \quad (4.45)$$

e adicionando a energia da rede eletrônica, obtêm-se

$$\varepsilon = n(1 - Y_m) \frac{M(A, Z)}{A} + \varepsilon'_e(n_e) + e_n(n_n) + \varepsilon_L. \quad (4.46)$$

Os autores assumem um sistema cristalino cúbico, que leva a energia da rede eletrônica à

$$\varepsilon_L = -1.444 Z^{2/3} e^2 n_e^{4/3}, \quad (4.47)$$

que permite calcular a energia de Fermi do nêutron pela expressão

$$E_{F_n} = \frac{M(A, Z) + Z(E_{F_e} - m_e c^2) + 4Z\varepsilon_L/3n_e}{A} \quad (4.48)$$

O escoamento de nêutrons (*neutron drip*) ocorre quando o lado direito da Eq.(4.48) se iguala à  $m_n c^2$ . Considera-se duas coisas a partir de agora na dedução da equação de estado: que a mesma é válida apenas no regime de densidades menores que a de escoamento de nêutrons do núcleo, e que  $\varepsilon_n = 0$ .

Nestas condições, se estabelece a seguinte lógica para obtenção da composição de equilíbrio: Para um valor fixo de  $n$ , é possível utilizar um valor tentativo para o par  $(A, Z)$



e obter um valor (tabelado) de  $M(A, Z)$ . Ainda, calculando  $n_N = n/A$  e  $n_e = Zn/A$ , pode-se calcular  $\varepsilon$ . A partir da combinação de todos os valores possíveis de  $(A, Z)$ , os valores que minimizam  $\varepsilon$  determinam o núcleo no equilíbrio. Neste caso a pressão é dada por:

$$P = n^2 \frac{\partial(\varepsilon/n)}{\partial n} \Big|_{A,Z} . \quad (4.49)$$

A equação de estado BPS se encontra tabelada em Shapiro e Teukolsky (2008), mas pode ser obtida analiticamente na região de baixa densidade do modelo analítico *Sly4* de Haensel e Potekhin (2004).



## Matéria de Quarks Fria

Três quarks para Master Mark.

---

James Joyce

O Modelo Padrão da física de partículas aponta os quarks como uma das partículas fundamentais no universo, juntamente com os léptons e bósons de calibre. Atualmente, acredita-se que a Cromodinâmica Quântica (QCD) seja a teoria fundamental que descreve a matéria de quarks através da interação forte entre férmions que possuem carga de cor.

Da mesma forma que a interação eletromagnética se dá entre partículas que possuem carga elétrica através da troca de fótons, a interação forte se dá entre partículas que possuem carga de cor através da troca de glúons. Contudo, os fótons não possuem carga elétrica, enquanto os glúons possuem carga de cor, tornando a teoria não-linear e de difícil tratamento matemático.

Nos regimes extremos de energia, a QCD apresenta duas propriedades: o confinamento para baixas energias e a liberdade assintótica para altas energias. Para diferentes regiões do diagrama de fases da QCD, é prevista a existência de novas fases da matéria. Dentre elas encontra-se a matéria fria de quarks (daqui por diante referenciada por CQM, de *cold quark matter*) localmente desconfinados, que se existir na Natureza, será no interior das estrelas de nêutrons. Porém, devido à complexidade da QCD, são utilizados novamente modelos efetivos para descrever os quarks nesse cenário. O modelo mais empregado na descrição da matéria de quarks é o modelo de sacola do MIT, proposto em 1974 por Chodos et al. (1974), no qual esta é tratada como um gás de férmions livres no interior de uma pequena região, denominada sacola. Como o modelo é empregado para o regime de temperatura nula, os graus de liberdade dos glúons serão desconsiderados. Nesse capítulo temos por objetivo estudar a matéria de quarks desconfinados. Iniciamos com um breve descrição

da CQM. A seguir, apresentamos alguns modelos propostos para a descrição da CQM, incluindo o do modelo de sacola do MIT, e fazemos uma discussão a respeito da hipótese da matéria estranha. Por último, discute-se dois modelos recentes para o modelo de quarks, a equação de estado MFTQCD (*Mean Field Theory of QCD*) e a QCDIRE (*QCD Infrared extension*), que serão utilizadas nos modelos híbridos desenvolvidos no Capítulo 7.

### 5.1 Definição da Matéria de Quarks Fria

O plasma de quarks e glúons (QGP) é o estado da matéria no qual os graus de liberdade relevantes são os quarks e os glúons, cuja dinâmica é estudada pela QCD. Ela prevê que a matéria ordinária composta por prótons e nêutrons pode sofrer transição de fase para o QGP quente, um sistema a altas temperaturas  $T_c \geq 150 \text{ MeV}$  e baixo potencial químico; e, também, para a CQM, um sistema muito denso  $\rho_c \sim 10^{15} \text{ g/cm}^3$  e em baixa temperatura.

Espera-se encontrar o QGP em três lugares: no universo primordial, cerca de  $10^{-5}$  s após o Big Bang; no interior de estrelas superdensas e em colisões de íons pesados relativísticos. Já foi observado, no Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC), um sistema a altas temperaturas e potencial químico próximo de zero. Um sistema similar com potencial químico alto e temperatura próxima de zero pode existir no interior de estrelas compactas. Fogaça e Navarra (2011) propõem que em tais sistemas as interações são parcialmente devidas a efeitos não perturbativos, os quais sobrevivem mesmo após o desconfinamento e que estão relacionados com a presença de condensados de glúons na CQM.

A QCD é uma teoria quântica de campos não abeliana e que desfruta de duas propriedades peculiares: o confinamento, segundo o qual seria necessária energia infinita para separar dois quarks (quarks estão sempre ligados dentro dos hádrons); e a liberdade assintótica, segundo a qual quarks e glúons interagem fracamente a pequenas distâncias (em reações de altas energias). A dinâmica dessas partículas é controlada pela densidade de Lagrangiana da QCD (Griffiths, 2008; Muta, 2010; Halzen e Martin, 1984; Greiner et al., 2013):

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \sum_{q=1}^{N_f} \bar{\psi}_i^q \left[ i\gamma^\mu (\delta_{ij}\partial_\mu - igT_{ij}^a G_\mu^a) - \delta_{ij}m_q \right] \psi_j^q \quad (5.1)$$

com a soma em  $q$  feita no número de sabores dos quarks  $N_f$ . Também temos:

$$F^{a\mu\nu} = \partial^\mu G^{a\nu} - \partial^\nu G^{a\mu} + g f^{abc} G^{b\mu} G^{c\nu} \quad (5.2)$$

sendo  $g$  a constante de acoplamento da teoria,  $G^{a\mu}$  e  $\psi_i^q$  o campo dos glúons e dos quarks,  $T_{ij}^a$  sendo os geradores e  $f^{abc}$  as constantes de estrutura do grupo  $SU(3)$  de cor.

## 5.2 Modelos Efetivos para Matéria de Quarks

Interação gravitacional e eletromagnética diminuem com a distância. Este não é o caso da interação forte. Como nunca foi detectado um quark em isolamento, supõe-se que a interação forte aumente de acordo com a distância. Isto faz com que seja extremamente difícil detectar um quark isolado. No entanto, todos os experimentos indicam que dentro dos hádrons os quarks podem se mover livremente, praticamente sem sofrer interações. Este estado é conhecido como liberdade assintótica, já que os quarks alcançam estados de partículas livres quando se aproximam uns dos outros. Como as leis de movimento dos quarks não são conhecidas, vários modelos tem sido propostos.

Muitas vezes é necessário modelar sistemas físicos complicados usando o método da teoria de perturbação. A teoria da perturbação é uma técnica em que, a partir de um sistema simples e ideal de solução conhecida, se acrescentam pequenas perturbações na tentativa de modelar um sistema real, simplificando significativamente os problemas. No entanto, como as perturbações irregulares são grandes na QCD, o método não é viável neste contexto. Isto, juntamente com o aumento da força com a distância, tornou muito difícil encontrar bons modelos que façam previsões corretas. A seguir serão descritos alguns destes modelos em uso para descrição da CQM.

### 5.2.1 Lattice QCD

Um dos modelos mais bem sucedidos foi formulado por Kenneth G. Wilson da Universidade de Cornell em 1974 (Wilson, 1974). Ele propôs que o tempo e espaço poderiam ser modelados como pontos discretos na *lattice* (ou rede). A rede é quadridimensional: três dimensões de estado e uma de tempo, e os mesmos são quantizados. Um incremento em uma das direções espaciais leva a uma distância discreta nesta direção, e um incremento na direção temporal levaria a uma distância discreta no tempo. Mas todos os experimentos indicam, até o presente momento, que o espaço-tempo é realmente contínuo e que no modelo

a rede ficaria cada vez mais e a mais fina, tal que no limite matemático do espaçamento infinitesimal, o espaçotempo contínuo seria recuperado. A descrição completa do modelo é bastante complexa (maiores detalhes podem ser consultados em Carrigan e Trower (1990) por exemplo), mas vale mencionar o grande avanço do modelo obtido nos anos 70. Foi mostrado que o campo entre duas cargas seria confinado em um certo número finito de pontos dentro da rede, o que explicaria o porquê da carga de cor ser confinada dentro dos hádrons. Porém foi provado posteriormente que isso ocorreria com todos os campos existentes, o que indicaria que o campo eletromagnético por exemplo entre duas cargas também seria confinado, que sabe-se não ser verdade.

A teoria afirma que se a rede se tornar cada vez mais fina, a teoria de calibre da eletrodinâmica quântica (QED) mostraria que o campo eletromagnético se “esticaria” para todos os pontos da rede, e então retornaria o caráter de alcance infinito. Foram efetuados vários cálculos numéricos na tentativa de confirmar estas propriedades, com sucesso, mostrando que neste caso o campo eletromagnético possui alcance infinito ao contrário do campo de cor que permaneceu confinado nas simulações. Através desta descoberta, o modelo de *lattice* ganhou o suporte da comunidade de partículas e campos (Carrigan e Trower, 1990).

### 5.2.2 Modelos de sacola

Um modelo foi sugerido pelo físico teórico russo Nikolay Bogoliubov, com uma abordagem completamente distinta do modelo de rede. Sua idéia era fornecer uma enorme massa aos quarks, confinando-os no sentido de impossibilitá-los de se mover. No entanto isto parecia contradizer a liberdade assintótica observada em um intervalo curto. Ele resolveu este problema ao confiná-los em uma cavidade esférica de raio  $R$  onde eles sentiriam um campo atrativo de força  $m$ . As massas dos quarks também são dadas por  $m$ , e então faz-se  $m \rightarrow \infty$ . Isto resultou no modelo de sacola de Bogoliubov, onde os quarks poderiam se mover livremente dentro da sacola mas completamente confinados por ela. Embora o modelo de Bogoliubov fosse muito simples, ainda foi possível extrair previsões bastante acuradas como o uso do mesmo (Thomas e Weise, 2010).

A grande diferença entre o modelo de sacola do MIT com o modelo de Bogoliubov é que o modelo do MIT possui um termo adicional na densidade lagrangiana. O termo adicionado é a constante de sacola  $B$  que corresponde à pressão para o exterior exercida

na sacola. Esta correção simples mostrou ser capaz de corrigir desvios nas predições das massas tabeladas de diferentes quarks e hádrons.

O modelo estabelece que a estrutura interna de um hádron está associada aos campos dos glúons e dos quarks que o compõem. Embora a abordagem para descrever essas partículas seja convencional em teoria de campos, os campos que descrevem os quarks nos hádrons não estão em todos os pontos do espaço, mas apenas em pontos no seu interior (no interior da sacola). O conjunto desses pontos é referido como “bag” ou sacola, à qual é conferida a propriedade de confinamento, visto que a carga de cor não pode escapar do seu interior. Desse modo, hádrons podem ser vistos como uma bolha de gás no vácuo não perturbativo da QCD. No modelo do MIT, a densidade de energia e pressão para um gás de quarks sem massa e em temperatura zero é:

$$\varepsilon_{MIT}(\rho_B) = \left(\frac{9}{4}\right) \pi^{2/3} \hbar c \rho_B^{4/3} + \mathcal{B} \quad (5.3)$$

$$P_{MIT}(\rho_B) = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{9}{4}\right) \pi^{2/3} \hbar c \rho_B^{4/3} - \mathcal{B} \quad (5.4)$$

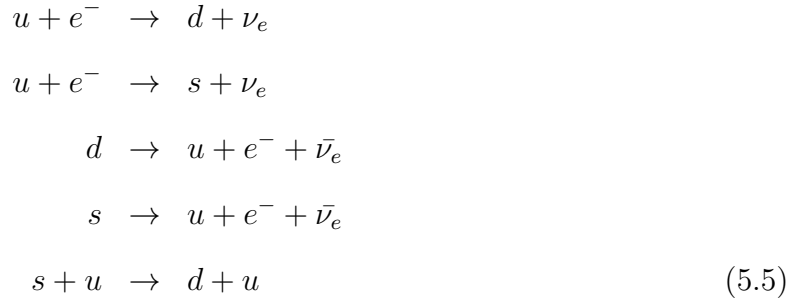
### 5.3 Mean Field Theory of QCD

A Teoria do Campo Médio da QCD, desenvolvida por Fogaça e Navarra (2011), é uma teoria baseada na QCD que assume que o campo de glúons pode ser decomposto em componentes de baixos (‘soft’) e altos (‘hard’) momentos, baseados nos trabalhos de Celenza e Shakin (1986) e Li e Shakin (2005).

Os valores médios esperados nos campos de baixos momentos são identificados com condensados de glúons de dimensão dois e quatro, respectivamente. O primeiro gera uma massa dinâmica,  $m_G$ , e o segundo um termo análogo à constante de sacola na energia e pressão. Dado o grande número de quarks, mesmo no regime de acoplamento fraco, o campo de *hard gluons* é forte, o número de ocupação é grande o que permite que os campos podem ser aproximados por campos de cor clássicos. O efeito dos condensados é diminuir a rigidez da equação de estado, enquanto os *hard gluons* endurecem a mesma, aumentando tanto densidade quanto pressão.

Para que a equação de estado seja adequada em condições estelares, considera-se os quarks  $u$ ,  $d$  e  $s$ , e elétrons em equilíbrio químico mantido pelos processos fracos (Farhi e

Jaffe, 1984):



Assume-se que os neutrinos escapam e não contribuem para a densidade de energia e pressão. No equilíbrio químico, têm-se:

$$\mu_d = \mu_s \equiv \mu \tag{5.6}$$

e

$$\mu_d + \mu_e = \mu. \tag{5.7}$$

A neutralidade de carga e conservação do número bariônico requer que

$$\frac{2}{3}\rho_U = \frac{1}{3}\rho_d + \frac{1}{3}\rho_s + \rho_e \tag{5.8}$$

e

$$\rho_B = \frac{1}{3}(\rho_u + \rho_d + \rho_s) \tag{5.9}$$

onde  $\rho_B$  é a densidade total bariônica e  $\rho_i$  pe a densidade de quarks de sabor  $i$  ( $i = u, d, s$ ) definida pelo momento de Fermi  $k_i$  correspondente, dado por

$$\rho_i = \frac{\gamma_Q}{2\pi^2} k_i^3, \tag{5.10}$$

onde a conservação local de cargas foi imposta. A densidade eletrônica é dada por

$$\rho_e = \frac{\gamma_e}{6\pi^2} k_e^3, \tag{5.11}$$

onde  $\gamma_Q$  e  $\gamma_e$  são os fatores de degeneração dos quarks e elétrons, dados por  $\gamma_Q = \gamma_e = 2$  por consequência do spin (com a soma sobre as cores já efetuada).



O conjunto de equações obtido estipula um sistema de quatro equações algébricas para o momento de Fermi de cada partícula:

$$\begin{aligned}
k_u^3 + k_d^3 + k_s^3 &= 3\pi^2 \rho_B \\
2k_u^3 &= k_d^3 + k_s^3 + k_e^3 \\
k_d^2 + m_d^2 &= k_s^2 + m_s^2 \\
\sqrt{k_u^2 + m_u^2} + \sqrt{k_e^2 + m_e^2} &= \sqrt{k_s^2 + m_s^2}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

para uma densidade bariônica fixa  $\rho_B$ . A densidade de energia então é dada por:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \left( \frac{27g^2}{16m_G^2} \right) \rho_B^2 + \mathcal{B}_{QCD} \\
&+ \sum_{i=u,d,s} 3 \frac{\gamma_Q}{2\pi^2} \left\{ \frac{k_i^3 \sqrt{k_i^2 + m_i^2}}{4} + \frac{m_i^2 k_i \sqrt{k_i^2 + m_i^2}}{8} - \frac{m_i^4}{8} \ln \left[ k_i + \sqrt{k_i^2 + m_i^2} \right] + \frac{m_i^4}{16} \ln(m_i^2) \right\} \\
&+ \frac{\gamma_e}{2\pi^2} \left\{ \frac{k_e^3 \sqrt{k_e^2 + m_e^2}}{4} + \frac{m_e^2 k_e \sqrt{k_e^2 + m_e^2}}{8} - \frac{m_e^4}{8} \ln \left[ k_e + \sqrt{k_e^2 + m_e^2} \right] + \frac{m_e^4}{16} \ln(m_e^2) \right\},
\end{aligned} \tag{5.13}$$

e a pressão por

$$\begin{aligned}
p &= \left( \frac{27g^2}{16m_G^2} \right) \rho_B^2 - \mathcal{B}_{QCD} \\
&+ \sum_{i=u,d,s} \frac{\gamma_Q}{2\pi^2} \left\{ \frac{k_i^3 \sqrt{k_i^2 + m_i^2}}{4} - \frac{3m_i^2 k_i \sqrt{k_i^2 + m_i^2}}{8} + \frac{3m_i^4}{8} \ln \left[ k_i + \sqrt{k_i^2 + m_i^2} \right] - \frac{3m_i^4}{16} \ln(m_i^2) \right\} \\
&+ \frac{\gamma_e}{6\pi^2} \left\{ \frac{k_e^3 \sqrt{k_e^2 + m_e^2}}{4} - \frac{3m_e^2 k_e \sqrt{k_e^2 + m_e^2}}{8} + \frac{3m_e^4}{8} \ln \left[ k_e + \sqrt{k_e^2 + m_e^2} \right] - \frac{3m_e^4}{16} \ln(m_e^2) \right\},
\end{aligned} \tag{5.14}$$

onde  $m_e = 0.5 \text{ MeV}$  é a massa do elétron,  $m_G$  é a massa dinâmica do glúon, e  $g$  é a constante de acoplamento ( $\alpha_s = g^2/4\pi$ ) na QCD.

O análogo da constante de sacola, chamada aqui de  $\mathcal{B}_{QCD}$ , é dada por

$$\mathcal{B}_{QCD} = \frac{9}{128} \phi_0^4 = \left\langle \frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \right\rangle, \tag{5.15}$$

onde  $\phi_0$  é uma escala de energia associada com a densidade de energia no vácuo e com o condensado de glúons.

Notamos que as equações (5.13) e (5.14) possuem três termos, desconsiderando o termo relativo aos elétrons, adicionado para manter a neutralidade global. O primeiro deles, proporcional a  $\rho_B$ , vem do termo de hard gluons que aparece na Lagrangiana e na equação de movimento dos quarks. O segundo,  $\mathcal{B}_{QCD}$ , vem exclusivamente do termo dos soft gluons e tem sinais opostos na energia e na pressão. Esse é o comportamento da constante de sacola do modelo do MIT. O último termo contém a contribuição cinética dos quarks. Em resumo, a pressão e a densidade de energia da CQM dependem das contribuições dos hard gluons, dos soft gluons e dos quarks.

#### 5.4 QCD InfraRed Extension

Dada a dificuldade de endereçar o problema do confinamento em sistemas fortemente interagentes a partir de uma teoria fundamental (QCD), várias tentativas alternativas foram propostas. Uma das principais abordagens são os modelos efetivos da QCD, que são teoria de campo que possuem um ou mais aspectos fundamentais da teoria original, mas mais simples de lidar de maneira que seja mais fácil extrair informação das mesmas.

Com relação ao setor de quarks da QCD, dois dos modelos mais bem sucedidos na descrição da quebra de simetria quiral e sua restauração em temperaturas altas são o Modelo Sigma Linear com Quarks (Gell-Mann e Lévy, 1960) e o modelo de Nambu-Jona-Lasínio (Nambu e Jona-Lasinio, 1961). Na sua formulação original, estes modelos não tratam do problema do confinamento dos quarks, tratando-os efetivamente, em ambos os modelos, como quasipartículas *on-shell*.

Duas direções possíveis pode ser tomadas em direção de uma descrição da dinâmica quiral e de confinamento são representadas ou via acoplamento do laço de Polyakov para graus de liberdade de quarks (modelos PLSM e PNJL, Meisinger e Ogilvie (1996); Fukushima (2004); Megías et al. (2006)) ou considerando interações não locais entre quarks como o resultado do acoplamento não perturbativo com os glúons, similar às versões não locais do modelo NJL. O modelo QCD IRE de Guimarães et al. (2015) considera uma terceira possibilidade, inspirada no modelo efetivo de Gribov-Zwanziger para QCD no infravermelho, apesar de não equivalente.

Embora esteja claro que quarks e glúons estão confinados em hádrons, um critério teórico definido para o confinamento não é consenso. Segundo Osterwalder e Schrader

(1973), uma condição suficiente para a ausência de quarks ou glúons confinados é a suposição que eles violem a positividade de reflexão. O trabalho em questão assume como critério de confinamento justamente a violação de positividade reflexiva de acordo com os trabalhos de General et al. (2001) e Alkofer e Smekal (2001), são explorados a termodinâmica do modelo de quarks onde o confinamento está codificado na violação de positividade do propagador do quark.

### *Modelo de quarks não trivial*

Baseado em evidências de estudos da QCD na rede (Parappilly et al., 2006) e equações de Dyson-Schwinger (Aguilar et al., 2008), o propagador do quark em  $T = 0$  pode ser parametrizado por uma função de massa dependente do momento, compatível com a forma funcional:

$$M_{eff}(p) = \frac{\Delta}{p^2 + m^2} + m_0, \quad (5.16)$$

onde  $m_0$  é a massa de corrente do quark.

De fato, os dados obtidos por simulações de QCD na rede de Parappilly et al. (2006) podem ser ajustados pela Eq. (5.16), com os valores  $\Delta = 0.196 \text{ GeV}^3$ ,  $m^2 = 0.639 \text{ GeV}^2$ , e  $m_0 = 0.014 \text{ MeV}$  (D. Dudal e Sorella, 2013). É interessante notar que, com estes parâmetros, o propagador de quark euclidiano

$$S(p) = \frac{1}{\gamma \cdot p + M_{eff}(p)} \quad (5.17)$$

exibe violação de reflexão positiva, indicando o confinamento dos quarks, de acordo com Capri et al. (2014).

A função de massa (5.16) pode ser obtida através do propagador de quark de mais baixo nível da teoria dada pela soma da lagrangiana da QCD,

$$S_{QCD} = \int d^4x \left[ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \bar{\psi}_\alpha^i [i(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} D_\mu^{ij} - m_0 \delta_{\alpha\beta} \delta^{ij}] \psi_\beta^j + i b^a \partial_\mu A_\mu^a + \bar{c}^a \partial_\mu D_\mu^{ab} c^b \right], \quad (5.18)$$

com a ação BRST

$$\begin{aligned}
S_{\xi\lambda} &= s \int d^4x \left[ -\bar{\eta}_\alpha^i \partial^2 \xi_\alpha^i + \bar{\xi}_\alpha^i \partial^2 \eta_\alpha^i + m^2 (\bar{\eta}_\alpha^i \xi_\alpha^i - \bar{\xi}_\alpha^i \eta_\alpha^i) \right] \\
&= \int d^4x \left[ -\bar{\lambda}_\alpha^i \partial^2 \xi_\alpha^i - \bar{\xi}_\alpha^i \partial^2 \lambda_\alpha^i - \bar{\eta}_\alpha^i \partial^2 \theta_\alpha^i + \bar{\theta}_\alpha^i \partial^2 \eta_\alpha^i \right] \\
&+ \int d^4x \left[ m^2 (\bar{\lambda}_\alpha^i \xi_\alpha^i + \bar{\xi}_\alpha^i \lambda_\alpha^i + \bar{\eta}_\alpha^i \theta_\alpha^i - \bar{\theta}_\alpha^i \eta_\alpha^i) \right] \tag{5.19}
\end{aligned}$$

e o termo de acoplamento

$$S_M = \int d^4x \left[ M_1^2 (\bar{\xi}_\alpha^i \psi_\alpha^i + \bar{\psi}_\alpha^i \xi_\alpha^i) - M_2 (\bar{\lambda}_\alpha^i \psi_\alpha^i + \bar{\psi}_\alpha^i \lambda_\alpha^i) \right] \tag{5.20}$$

entre o campo de quarks  $\psi$  e o os campos auxiliares  $\xi$  e  $\lambda$ .

A ação resultante

$$S = S_{QCD} + S_{\xi\lambda} + S_M \tag{5.21}$$

é renormalizável (Baulieu et al., 2010), sendo equivalente à QCD no limite das altas energias, porém alterando o limite infra-vermelho da teoria (em relação ao panorama perturbativo). Os campos auxiliares do setor de quarks em (5.21) podem ser integrados, provendo uma teoria efetiva de quarks onde a ação não local pode ser expressada, em uma aproximação quadrática, como

$$S_{nl} = \int d^4x \bar{\psi}_\alpha^i \left[ i(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \delta^{ij} \partial_\mu - \delta^{ij} \delta_{\alpha\beta} \left( \frac{2M_1^2 M_2}{-\partial^2 + m^2} + m_0 \right) \right] \psi_\beta^j. \tag{5.22}$$

Nota-se que neste modelo a função de massa do quark (Eq.5.16) pode ser derivada diretamente da ação efetiva (Eq.5.22), com  $\Lambda \equiv 2M_1 M_2$ .)

### A função de Partição

Em baixas ordens, a teoria definida pela Eq.(5.21) possui uma ação quadrática. Logo, sua função de grande partição pode ser calculada de maneira exata através de técnicas de teoria de campos à temperatura finita (Kapusta e Gale, 2006).

Para introduzir temperatura no modelo, faz-se a compactificação de uma direção euclidiana (a 4-direção por convenção), enquanto que a introdução do potencial químico não é trivial.

Partindo da ação local dada pelq Eq.(5.21), calcula-se a Hamiltoniana  $\mathcal{H}$ . Identificando o número de quarks com a carga associada à simetria global de transformação  $U(1)$

$$\psi(x) \longrightarrow e^{-i\alpha} \psi(x), \tag{5.23}$$

usa-se o teorema de Noether para calcular a densidade de corrente correspondente  $j^\mu$ , fazendo que  $\mathcal{N} = \int d^3x j^0$  seja o operador de número de quarks.

A função de grande partição resultante

$$Z(T, \mu) = \text{Tr} \exp \left[ -\frac{\mathcal{H} - \mu \mathcal{N}}{T} \right], \quad (5.24)$$

pode ser convertida em uma integral funcional e calculada diretamente Guimarães et al. (2015). É possível dividir o resultado em duas partes: Um termo sendo  $\mu$ -independente e o outro  $(T, \mu)$ -dependente,

$$\begin{aligned} \frac{\log Z(T, \mu)}{2\beta V N_c N_f} &= \sum_f \log \{ \beta^2 [\mathbf{p}^2 + M_{n,\mathbf{p}}^2(0) + \omega_n^2] \} + \sum_f \log \left\{ \frac{\mathbf{p}^2 + M_{n,\mathbf{p}}^2(\mu) - (i\omega_n + \mu)^2}{\mathbf{p}^2 + M_{n,\mathbf{p}}^2(0) + \omega_n^2} \right\} \\ &\equiv \frac{\log Z(T, 0)}{2\beta V N_c N_f} + \frac{\log Z^{(\mu)}(T, \mu)}{2\beta V N_c N_f}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

onde a notação soma-integral foi utilizada,

$$\sum_f (\dots) \equiv T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\dots). \quad (5.26)$$

O termo associado à  $\mu = 0$  pode ser dividido em uma soma de quatro termos, dois dos quais correspondem à pressões positivas com massas conjugadas complexas, um à uma partícula com massa real e outro com contribuição negativa à pressão. Cada um destes termos podem ser calculados diretamente como a pressão de um gás livre. Subtraindo a contribuição da energia do vácuo, chega-se em

$$\log Z(T, 0) = \log Z_0 + 4N_c N_f V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \log \left[ \frac{(1 + e^{-\beta\varphi_1})(1 + e^{-\beta\varphi_2})(1 + e^{-\beta\varphi_3})}{(1 + e^{-\beta\varphi_0})^2} \right], \quad (5.27)$$

para a contribuição de  $\mu = 0$ , onde

$$\log Z_0 = 2N_c N_f \beta V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - 2\varphi_0) \quad (5.28)$$

é a contribuição do vácuo. As grandezas  $\varphi_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) são funções do momento interno  $p^2$  (Guimarães et al., 2015).

O termo dependente de  $\mu$  é dado por

$$\log Z^{(\mu)}(T, \mu) = 2\beta V N_c N_f \sum_f \log \left\{ \frac{\mathbf{p}^2 + M_{n,\mathbf{p}}^2(\mu) - (i\omega_n + \mu)^2}{\mathbf{p}^2 + M_{n,\mathbf{p}}^2(0) + \omega_n^2} \right\}. \quad (5.29)$$

Uma expressão fechada para Eq.(5.29) pode ser encontrada para o limite de  $T = 0$ . Utilizando o teorema de Cauchy, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \log Z(0, \mu) &= \log Z^{(\mu)}(0, \mu) = 2\beta V N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{2\pi} f(i\theta + \mu) \\ &= 2\beta V N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \frac{d\theta}{2\pi} [f(i\theta + \mu) + f(-i\theta + \mu)], \end{aligned} \quad (5.30)$$

onde

$$f(\xi) := \log \left\{ \frac{\Omega_{\mathbf{p}}^2(\xi^2) - \xi^2}{\Omega_{\mathbf{p}}^2[(\xi - \mu)^2] - (\xi - \mu)^2} \right\} \quad (5.31)$$

e

$$\Omega_{\mathbf{p}}^2(\zeta) := \mathbf{p}^2 + \left[ \frac{M_3}{-\zeta + \mathbf{p}^2 + m^2} + m_0 \right]^2. \quad (5.32)$$

A expressão acima permite calcular a função de partição (Equação (5.25)) de maneira exata para que seja possível obter as quantidades termodinâmicas associadas.

## Transições de fase Hádrons $\rightarrow$ CQM

A ciência nunca resolve um problema  
sem criar outros dez.

---

George Bernard Shaw

Nos capítulos anteriores, falou-se sobre princípios de evolução estelar que levam à formação das estrelas de nêutrons (bem como as mais importantes características desses corpos celestes), foram apresentadas as principais propriedades da matéria nuclear e o modelo SWRDP, e ainda foi apresentada a matéria de quarks (com destaque para o modelo MFTQCD e QCDIRE), tendo em vista a utilização desses conhecimentos no estudo da transição de fase matéria hadrônica  $\rightarrow$  CQM e da repercussão da formação dessa nova fase nas propriedades globais da estrela de nêutrons (massa e raio).

Várias transições de fase podem ocorrer no interior de estrelas de nêutrons, desde a transição líquido-gás, na matéria nuclear da superfície, até a transição para a matéria de quarks, condensados de káons, píons e dibárions na região mais central destas estrelas. A caracterização da ordem desta transição é discutida neste capítulo através do estudo da possível interface de uma fase mista de hádrons e quarks, conforme descrito por Heiselberg e Hjorth-Jensen (2000).

### 6.1 Fases da QCD

Por hipótese, todas as estrelas de nêutrons seriam meta-estáveis com respeito a estrelas estranhas que possuam o mesmo número bariônico; isso significa que uma estrela de nêutrons reduz sua massa gravitacional ao converter-se em estrela estranha. Esse postulado pode ser compreendido ao determinar-se que o potencial de Gibbs para a matéria

estranha é menor do que o potencial de Gibbs para a matéria nuclear. Entretanto, uma estrela de nêutrons somente poderia realizar essa transição através da criação de  $\approx 10^{57}$  quarks estranhos.

No caso da matéria estranha, a energia por bárion na fase de desconfinamento (em  $T = 0$  e  $P = 0$ ) deve ser menor que a massa do nêutron, que de acordo com Farhi e Jaffe (1984); Weissenborn et al. (2011), esta energia seria da ordem de  $934 \text{ MeV}$ , que se traduz em:

$$E_A \equiv \frac{\varepsilon}{\rho_B} \leq 934 \text{ MeV}. \quad (6.1)$$

Essa conversão de matéria hadrônica em matéria de quarks é muito mais favorável em uma estrela de nêutrons do que em um núcleo atômico. A pressão central deve favorecer a produção de matéria de quarks de dois sabores, a qual pode prontamente converter-se em matéria estranha. Se a pressão interna for alta o suficiente, partículas  $\Lambda$ , formadas pelo conjunto de quarks  $uds$ , podem aparecer e agrupar-se para formar sementes de matéria estranha. Estrelas de nêutrons nascem quentes e também podem “queimar” a matéria de nêutrons em matéria estranha. Neutrinos de raios-cósmicos podem induzir essa conversão, e, finalmente, pequenos agrupamentos de matéria estranha que entrem na estrela de nêutrons podem crescer e converter toda a estrela. O assunto da criação de matéria estranha não será tratada aqui nesta tese. Para um panorama mais abrangente do assunto, ver Horvath (2010).

A formação de uma região mais densa, que passe a atingir o limite da transição de fase, no interior de estrelas de nêutrons, pode acontecer de diferentes maneiras:

- Poucos instantes após o colapso e explosão de uma supernova, estrelas de nêutrons nascem quentes. Após alguns segundos, essa estrela resfria rapidamente de algumas dezenas de  $\text{MeV}$  para temperaturas inferiores a  $1 \text{ MeV}$ , passando a resfriar de maneira mais lenta. Esse resfriamento deve gerar uma contração na estrela, aumentando a densidade no seu interior.
- O aumento da densidade no caroço de uma estrela também ocorre devido à redução da sua velocidade angular de rotação. Assim como acontece no caso do resfriamento, uma estrela de nêutrons nasce muito veloz, reduzindo sua frequência de rotação ao longo do tempo.



- Estrelas que se encontram em um sistema binário podem acretar massa de sua companheira, levando ao aumento de sua densidade e pressão interna, atingindo níveis elevados e, possivelmente, favorecendo a transição de fase de matéria nuclear para o plasma de quarks e glúons.

Em resumo: é possível, com base nos argumentos qualitativos apresentados nesta subseção, concluir que é possível ocorrer uma transição de fase no interior de estrelas de nêutrons, formando uma fase mais compacta, composta pelo plasma de quarks e glúons.

Essa transição pode ocorrer quando a região central da estrela atingir uma certa densidade crítica, seja através de seu resfriamento, diminuição do período de rotação ou por fenômeno de acréscimo de massa exterior à estrela.

Dentre as transições envolvidas na QCD, as transições de fase hádron-quark estarão presentes em dois cenários: o de colisões de íons pesados e o de estrelas compactas. As características do regime de estrelas de nêutrons no diagrama de fases da QCD (Fig.6.1) que devem ser levadas em conta na realização da transição de fase são:

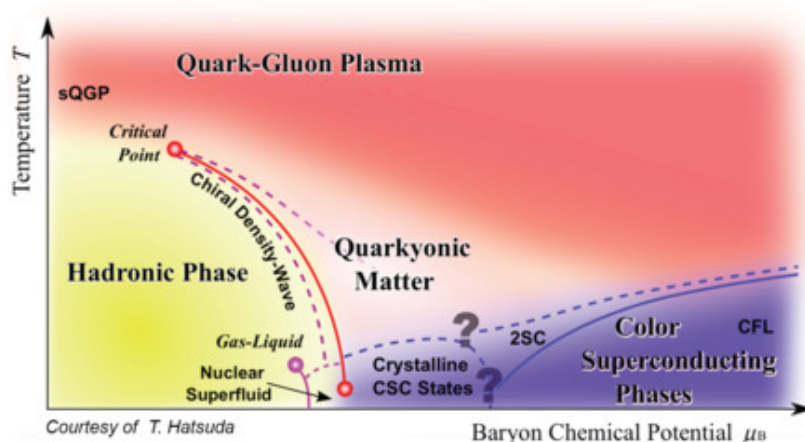


Figura 6.1: Diagrama esquemático das fases da QCD em temperaturas e densidades extremas. A linha vertical identifica a temperatura e a horizontal o potencial químico  $\mu$ . Conforme  $\mu$  aumenta em baixas temperaturas, o sistema passa do vácuo para matéria nuclear em  $\mu \approx 310 MeV$ . Em um potencial químico maior e desconhecido, existe a transição para matéria de quarks onde, em densidades altas o suficiente, se espera que alcance a fase de *color-flavor-locking* (CFL). Imagem obtida de CBM (2016).

1. altas densidades bariônicas: pois estrelas de nêutrons possuirão densidades acima da densidade da matéria nuclear;

2. temperatura nula: apesar de a temperatura no interior desses objetos ser da ordem de  $10^5 - 10^7 K$ , esse valor é baixo quando comparado à escala de energia nuclear ( $10^9 K \sim 0.1 MeV$ );
3. conservação de número bariônico: a conservação de número bariônico deve ser global, a fim de possibilitar um arranjo do sistema de menor energia;
4. carga elétrica total nula: a carga líquida total de uma estrela de nêutrons deve ser nula, contudo, isso não implica que o seja em cada fase separadamente. Assim, a imposição de conservação de carga deve ser global;
5. violação da conservação de estranheza: a interação fraca pode mudar o sabor dos quarks, violando a conservação de estranheza de um sistema. Como a escala dessa interação é da ordem de  $10^{-10} s$ , que é muito menor que a escala de evolução de uma estrela de nêutrons, a carga de estranheza líquida será não-nula nesse cenário.

## 6.2 Termodinâmica da transição de fase

Existem, atualmente, duas linhas de pesquisa distintas com relação ao estudo da transição de fase hádron-quark, que diferem quanto à formação de uma fase intermediária, com uma composição mista de hádrons e quarks no interior da estrela.

Essas duas linhas de pesquisa encontradas na literatura são as seguintes:

- **Transição de Fase em Primeira Ordem:** Haverá absorção ou perda de calor ao longo da transição, ou seja, calor latente. A presença de uma fase mista devido à coexistência de fases é outra característica importante desse tipo de transição. Tais transições de fase geram uma descontinuidade na derivada primeira da energia livre de Gibbs com relação a uma variável intensiva do sistema e, por isso, são também chamadas de transições de fase descontínuas. No contexto das estrelas compactas, essa transição ocorre em pressão constante na fase mista de hádrons e quarks. Nesse caso, a transição entre duas fases distintas acontece, segundo a construção de Maxwell, em um único valor de potencial químico, temperatura e pressão, de acordo com as equações abaixo:

$$\mu_1 = \mu_2, \tag{6.2}$$

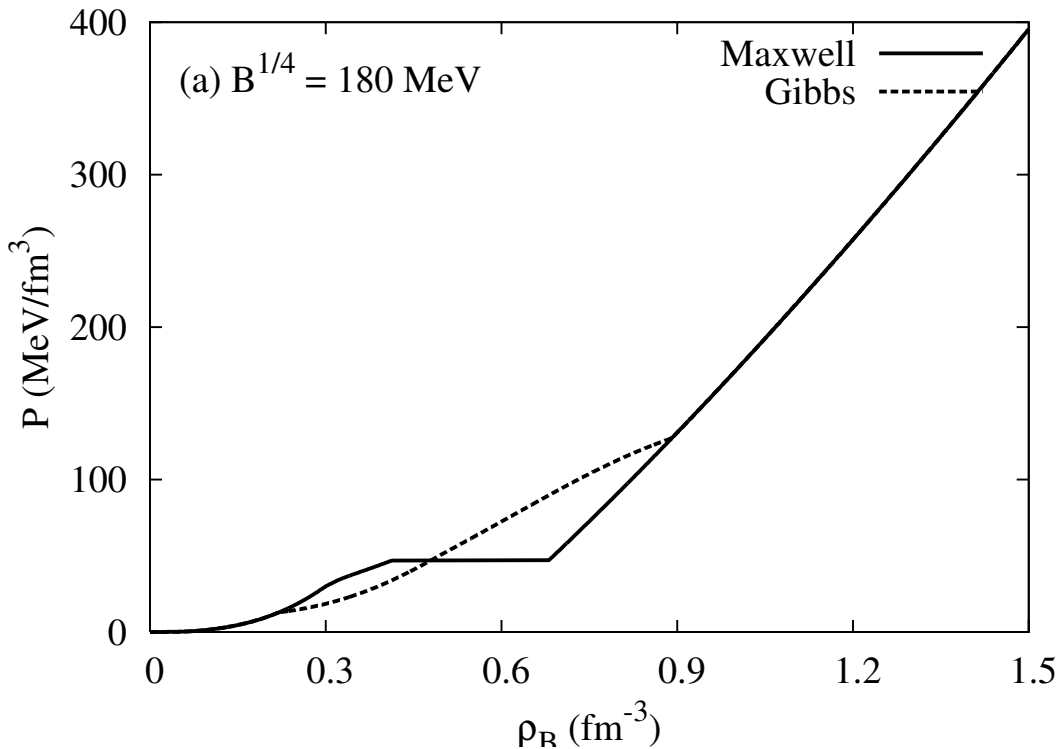


Figura 6.2: Exemplo de equação de estado híbrida onde são aplicados os critérios de Maxwell (linha contínua) e de Gibbs (linha pontilhada) conforme Bhattacharyya et al. (2010). No exemplo é feita a junção da equação de estado hadrônica TM1YY com a equação de estado de quarks do MIT Bag Model com  $B^{1/4} = 180$  MeV.

$$T_1 = T_2, \quad (6.3)$$

$$p_1(\mu, T) = p_2(\mu, T). \quad (6.4)$$

- **Transição de Fase Contínuas:** Neste caso o comportamento da pressão, durante a fase mista, deixa de ser constante, como era no caso anterior. As funções densidade de energia e potencial químico também assumem um comportamento distinto e passam a ser funções contínuas. Além disso, a carga elétrica de uma estrela que possui esta estrutura passa a ser conservada globalmente.

A Fig.6.2 mostra, de forma esquemática, como devem se comportar as equações de estado obtidas através de um tratamento com pressão constante ou com pressão variável.

A primeira linha de abordagem, com pressão constante, foi bastante utilizada nas primeiras pesquisas sobre o tema, embora ainda seja empregada em vários trabalhos recentes como uma forma de simplificação ou aproximação. As estimativas apresentadas por Baym e Chin (1976), utilizando esse tratamento, sugeriam que a matéria hadrônica não se con-

verteria em matéria de quarks a menos que atingisse densidades da ordem de  $10\rho_0$ . Essa altíssima densidade de desconfinamento pode ser explicada, em parte, pela bastante rígida equação de estado para matéria nuclear empregada nesses trabalhos (módulo de compressibilidade  $K = 550\text{MeV}$ ). Tais densidades são apenas marginalmente atingidas nos modelos de estrelas compactas; por essa razão, durante alguns anos, a existência de matéria de quarks no interior de estrelas de nêutrons foi desacreditada.

Contudo, pressão constante na fase mista – independentemente da proporção entre as fases em equilíbrio – é um caso especial que não descreve a matéria constituinte das estrelas de nêutrons, a menos que seja assumido que a tensão superficial seja alta o suficiente para garantir que a transição ocorra através de uma interface aguda (*sharp interface*), como mostram Yasutake et al. (2016). Este cenário é possível dado as incertezas no valor da tensão superficial, de acordo com Alford et al. (2001); Palhares e Fraga (2010); Pinto et al. (2012).

Esta é a abordagem que será seguida neste trabalho. Na Figura 6.3 temos um diagrama esquemático de como a equação resultante deve ser (Alford et al., 2013).

Por completeza, uma descrição detalhada das transições de fase contínuas se encontra no Apêndice A.

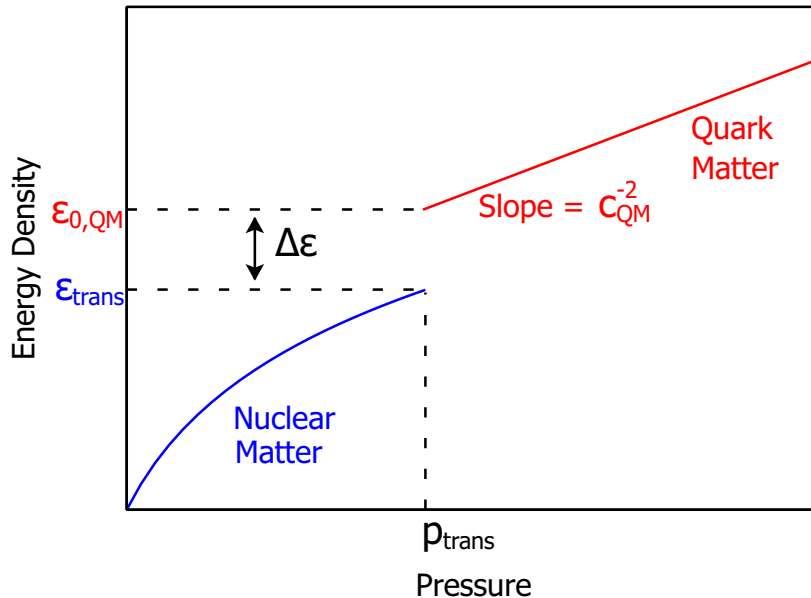


Figura 6.3: Equação de estado híbrida  $\varepsilon(p)$  para matéria densa. A equação de estado da CQM é especificada pela pressão de transição  $p_{\text{trans}}$ , a descontinuidade da energia por  $\Delta\varepsilon$  e a velocidade do som constante na CQM por  $c_{\text{QM}}$  (Alford et al., 2013).

## CQM em estrelas de Nêutrons: Modelos e Observações

Em algum lugar, algo incrível espera  
para ser descoberto.

---

Carl Sagan

Este capítulo é dedicado ao estudo das estrelas híbridas utilizando os modelos estudados nos capítulos anteriores. Foram discutidos os princípios de evolução estelar que levam à formação das estrelas de nêutrons (bem como as mais importantes características desses corpos celestes), foram apresentadas as principais propriedades da matéria nuclear no Cap.4 (e os modelos capazes de descrevê-las, destacando-se o modelo SWRDP) e foram introduzidos os modelos da QCDIRE e MFTQCD no Cap.5, com o objetivo de utilizar estas equações de estado no estudo da transição de fase matéria hadrônica  $\rightarrow$  CQM.

Como apontado no Cap.6, várias transições de fase podem ocorrer no interior de estrelas de nêutrons, desde a transição líquido-gás, na matéria nuclear da superfície, até a transição para a matéria de quarks, condensados de káons, píons e dibárions na região mais central destas estrelas.

Neste capítulo são apresentados alguns aspectos relacionados à dinâmica dessa transição ocorrida no interior de um estrela de nêutrons, analisando a possibilidade de transição de fases do modelo SWRDP hadrônico para um núcleo de quarks do modelo MFTQCD. O modelo QCDIRE também será analisado, apesar de não ser possível uma transição de fase do modelo SWRDP para o QCDIRE, como será visto adiante.

### 7.1 Modelo híbrido SWRDP + MFTQCD

A construção do modelo SWRDP+MFTQCD se dá pelos seguintes passos:

1. Determinação do intervalo de validade dentro do espaço de parâmetros do modelo MFTQCD.
2. Criação da equação de estado híbrida através da junção das equações de estado do modelo hadrônico (SWRDP) com o modelo de quarks (MFTQCD) obtido no item anterior (utilizando o programa *eos.maxwell.construction* descrito no Apêndice D).
3. Construção do modelo estelar utilizando a equação de estado híbrida e estudo das suas propriedades globais e observáveis (utilizando o programa *tovsolver* descrito no Apêndice D).

### 7.1.1 Intervalo de validade para o modelo MFTQCD

Ao estudar a estrutura estelar a partir da aplicação da MFTQCD, Franzon et al. (2012) estavam interessados nos modelos com matéria estranha estável. Parte do trabalho dos autores consistiu em encontrar um intervalo dentro do espaço de parâmetros tal que valha a condição expressa pela relação (6.1).

Esta condição deve valer no regime de  $P = 0$ , o que permite obter numericamente, através das Eqs.(5.14) e (5.13), uma relação entre a constante de sacola  $B_{QCD}$  e a razão  $\xi = g/m_G$ , definindo a região traçada na Fig.7.1 pela linha sólida. Regiões à esquerda da linha sólida são regiões absolutamente estáveis (e à direita da linha tracejada, ver Franzon et al. (2012) para maiores detalhes sobre a segunda condição de estabilidade).

Isto posto, tomamos então como região de interesse a região à direita da linha sólida, pois deseja-se justamente que a matéria seja instável a ponto da transição de fase ocorrer. Inicialmente, foi efetuado um estudo do comportamento da equação de estado, variando os parâmetros livres  $\xi$  e  $B_{QCD}$  na região de não estabilidade, tal que  $0.0015 \leq \xi \leq 0.0075$  e  $60 \text{ MeV}/fm^3 \leq B_{QCD} \leq 100 \text{ MeV}/fm^3$ . As equações de estado geradas com as diferentes parametrizações podem ser vistas nas Fig.7.2.

Duas características importantes da equação de estado MFTQCD são a sua alta sensibilidade à variação do parâmetro  $\xi$  e a sua baixa sensibilidade com relação à constante  $B_{QCD}$ . De acordo com Fogaça e Navarra (2011), pode-se ver na Fig.7.3 que os quarks e hard glúons contribuem predominantemente tanto para a anergia como para a pressão. Isso explica o comportamento onde, ao se variar  $B_{QCD}$  mantendo  $\xi$  constante, a curva da equação de estado varia muito pouco, o que permite que o estudo seja feito com um valor de constante

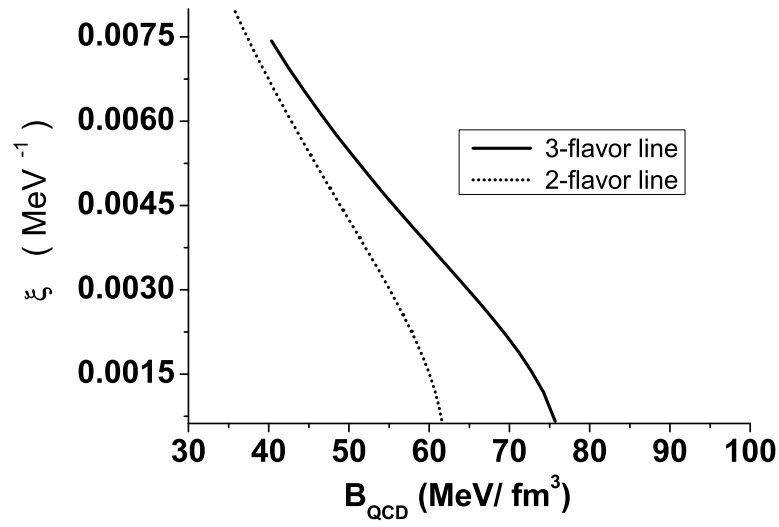


Figura 7.1: Valores de  $\xi = g/m_G$  como função de  $B_{QCD}$  para diferentes valores da energia por bárion (Franzon et al., 2012).

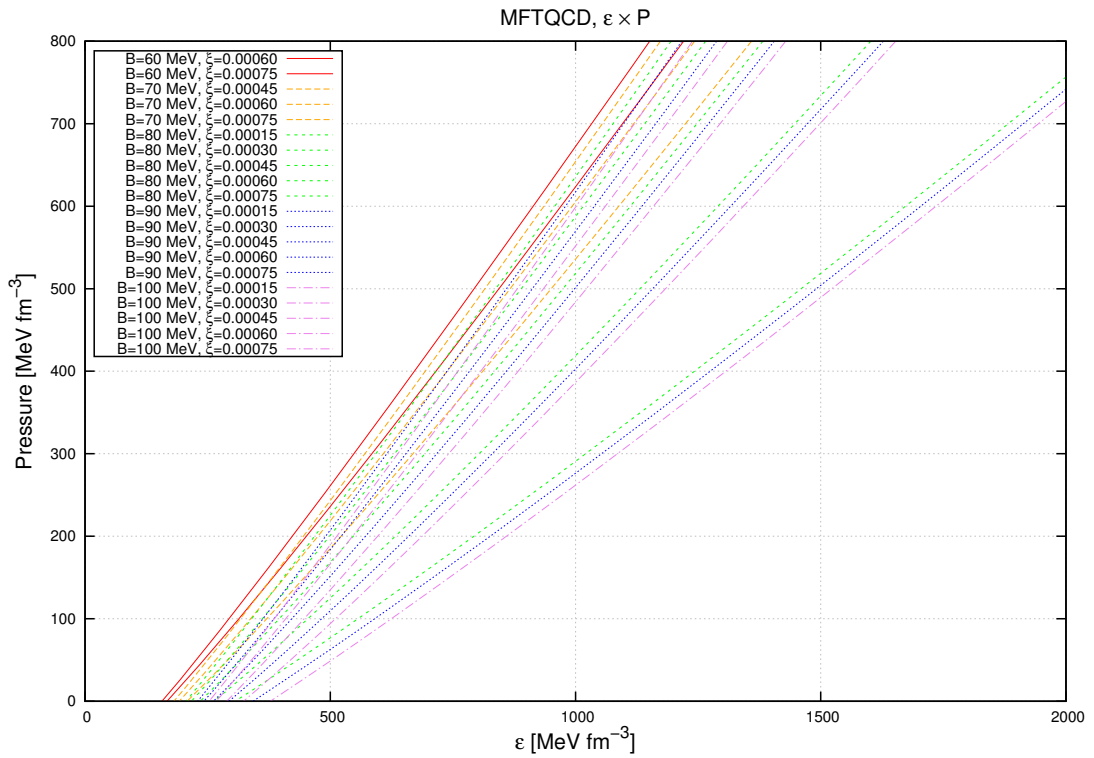


Figura 7.2: Diferentes parametrizações da equação de estado MFTQCD. O espaço de parâmetros utilizado variou de  $0.0015 \leq \xi \leq 0.0075$  e  $60 \text{ MeV}/\text{fm}^3 \leq B_{QCD} \leq 100 \text{ MeV}/\text{fm}^3$ .

$B_{QCD}$  fixo e  $\xi$  variável.

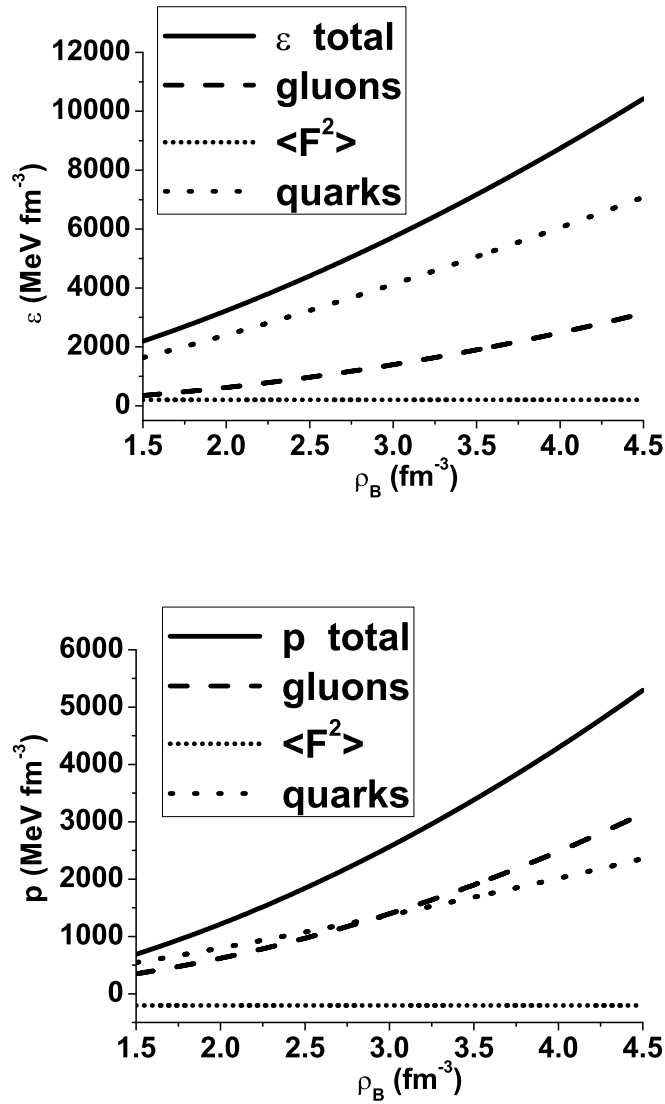


Figura 7.3: Contribuições individuais à densidade de energia e a pressão da MFTQCD: hard glúons, quarks, soft glúons e a soma das três componentes (Fogaça e Navarra, 2011).

Para exemplificar, na Fig.7.4(a) é possível ver que o comportamento da equação de estado ao manter a constante de sacola  $B_{QCD} = 90 \text{MeV}/\text{fm}^3$  e variando-se  $\xi$ . Como contra-exemplo, na Fig.7.4(b) é mostrado que, ao manter  $\xi$  fixo, a equação de estado exibe pouca variação.



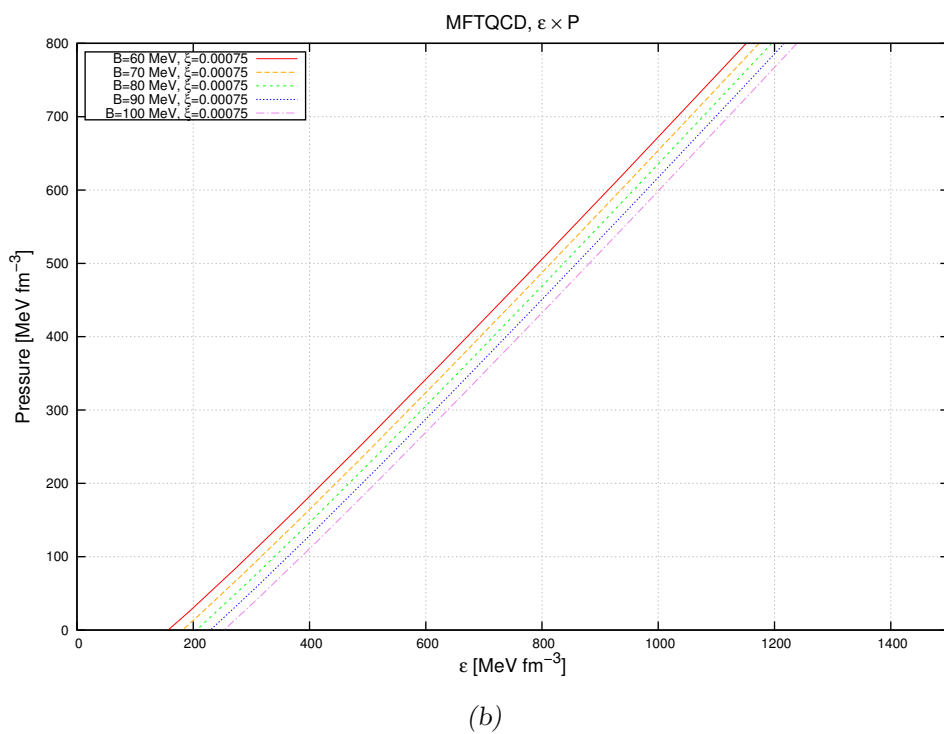
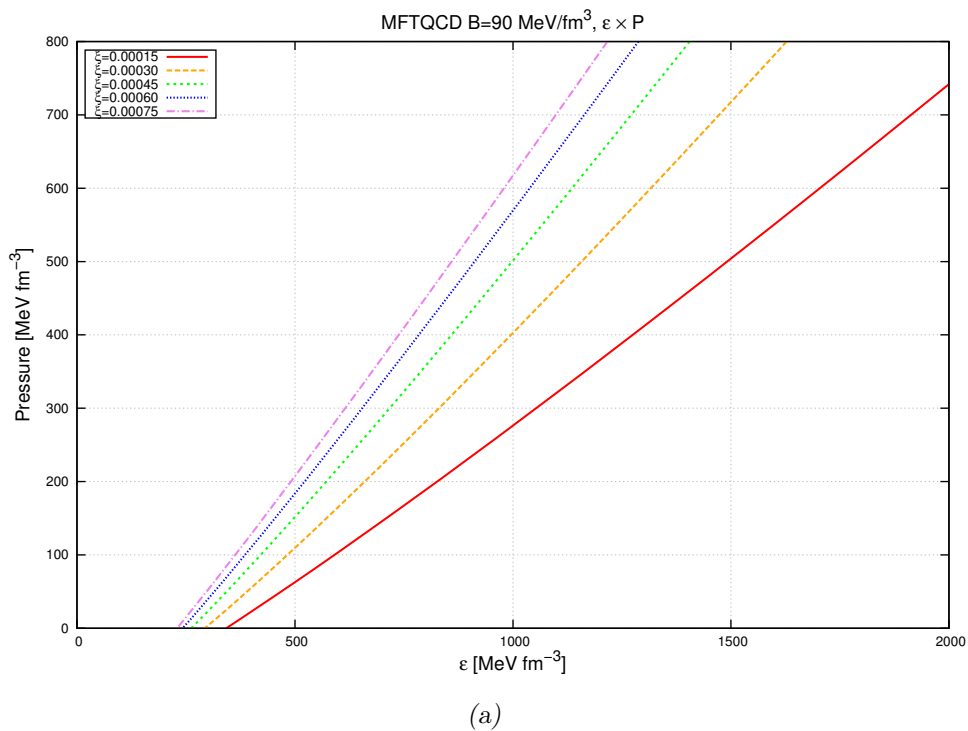


Figura 7.4: Sensibilidade da equação de estado à variação de parâmetros: (a)  $B_{QCD} = 90 \text{ MeV}/\text{fm}^3$  e variando-se  $\xi$  (b)  $\xi$  fixo e  $B_{QCD}$  variável.

### 7.1.2 Equação de estado

O modelo SWRDP é parametrizado por  $\zeta$ , que ajusta a repulsão forte da equação de estado, como visto na Seção 4.2.4. Por sua vez, o modelo MFTQCD possui duas parametrizações, o parâmetro  $\xi$  que indica a razão entre a constante de acoplamento da QCD e a massa dinâmica do glúon, e a constante  $B_{QCD}$ . O primeiro passo é determinar visualmente quais as parametrizações se interceptam no sistema de eixos  $P \times \mu$ . Como exposto anteriormente, a variação de  $B_{QCD}$  tem pouca influência na MFTQCD, então fixou-se  $B_{QCD} = 90 \text{ MeV fm}^{-3}$  por ser um valor intermediário.

Fenomenologicamente, este valor está acima do comumente aceito para a constante de sacola do MIT. Porém esta escolha se justifica pelo fato da MFTQCD ser similar ao modelo de sacola do MIT, mas não necessariamente o mesmo. Neste caso as constantes de sacola das duas teorias estão relacionadas pela razão entre a constante de acoplamento e a massa dinâmica do glúon, no sentido de que uma combinação  $(B_{QCD}, \xi)$  da MFTQCD leva a um  $\mathcal{B}$  do MIT, tal que  $B_{QCD}$  não é necessariamente relacionado à  $\mathcal{B}$ .

Nas Figs.7.5-7.9, são traçadas as diferentes parametrizações de  $\zeta$  contra as diferentes parametrizações de  $\xi$ . Abaixo de cada figura o detalhe de onde as parametrizações se cruzam, que indica o *locus* da transição de fase.

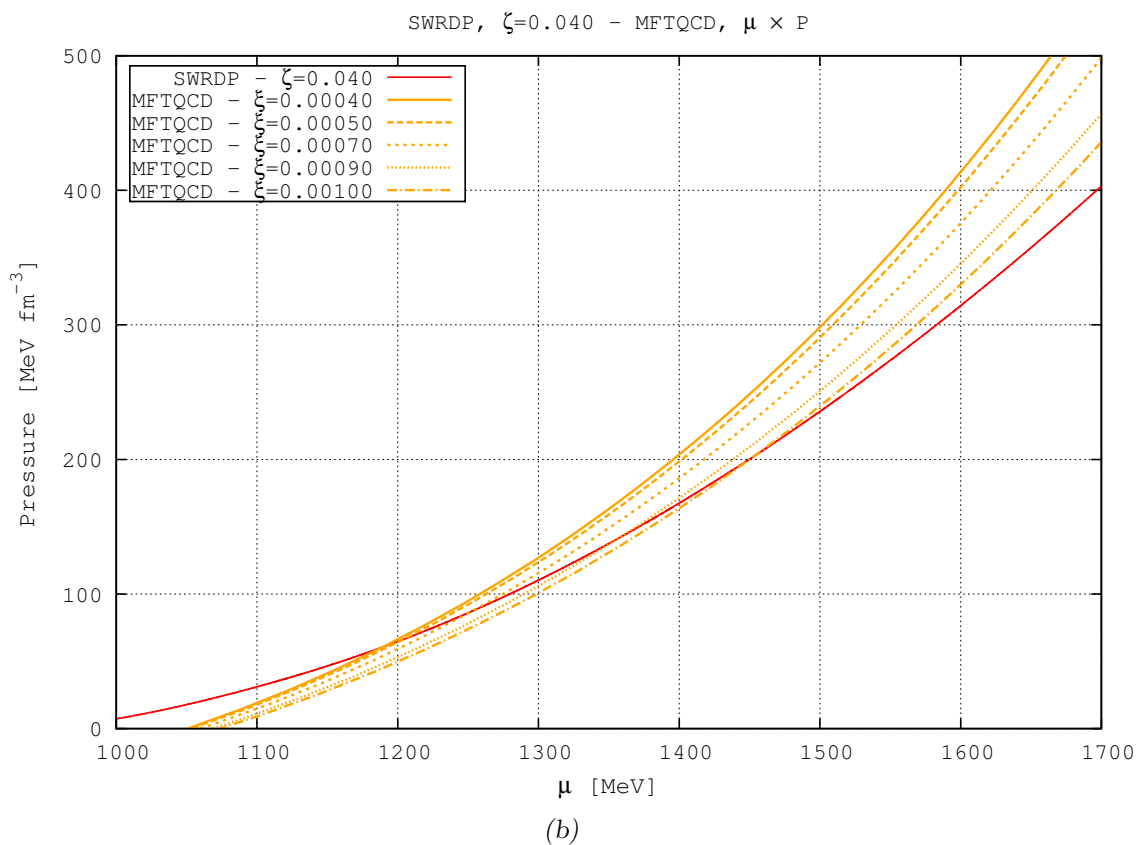
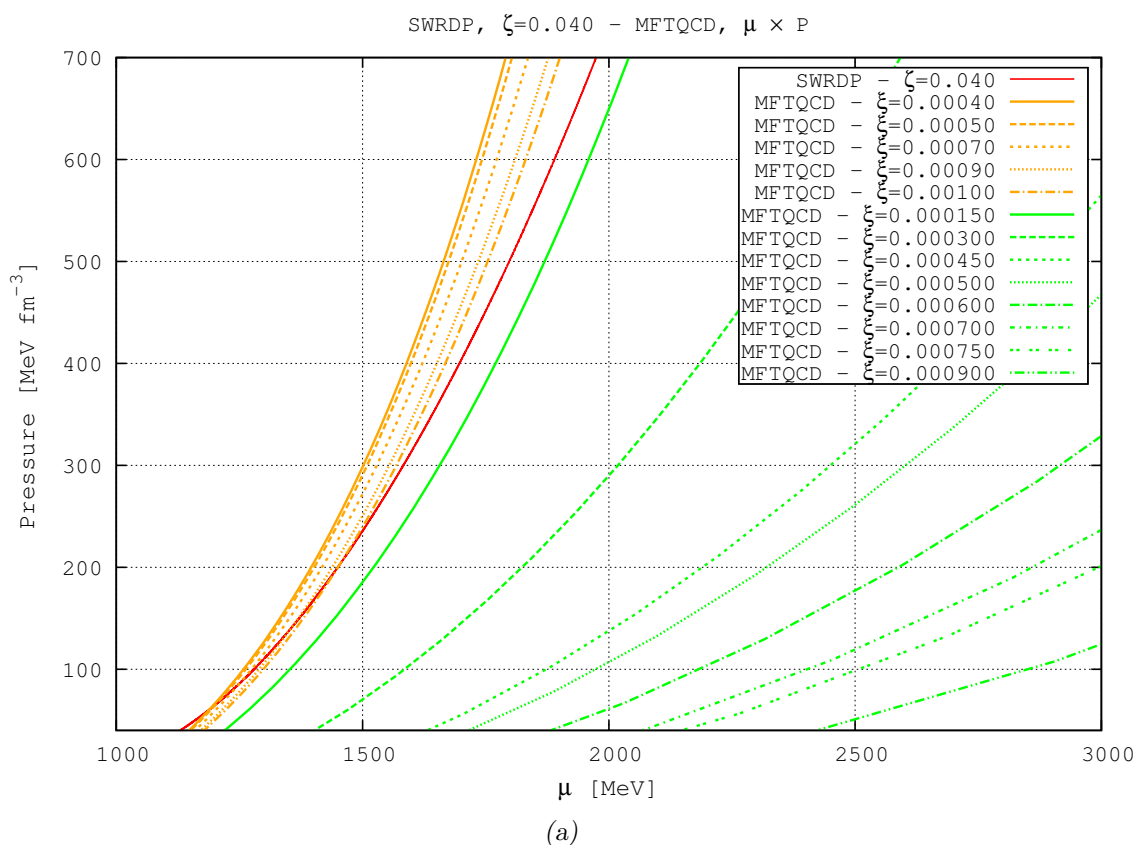


Figura 7.5: Equações de estado SWRDP( $\zeta = 0.040$ ) + MFTQCD( $B_{QCD} = 90 \text{ MeV fm}^{-3}$ ): (a) Visão geral das equações de estado (b) Detalhe do ponto onde  $\mu_H = \mu_Q$

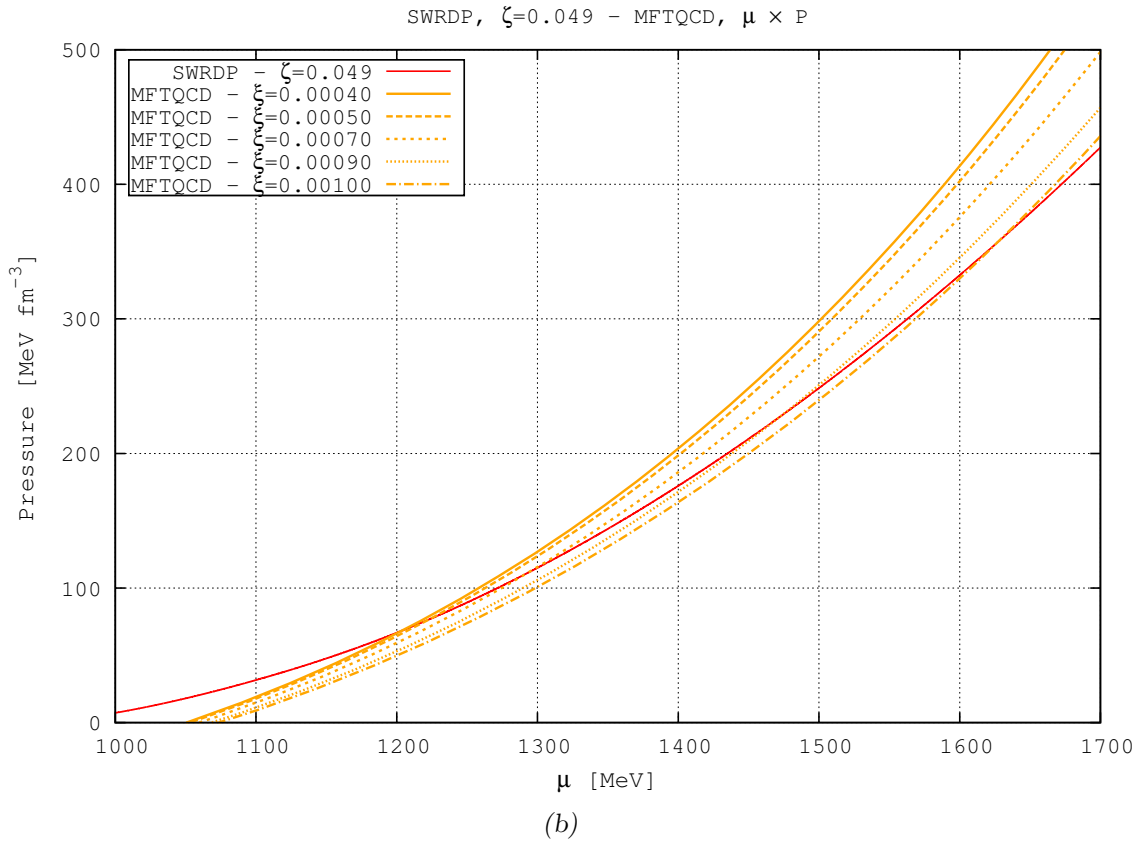
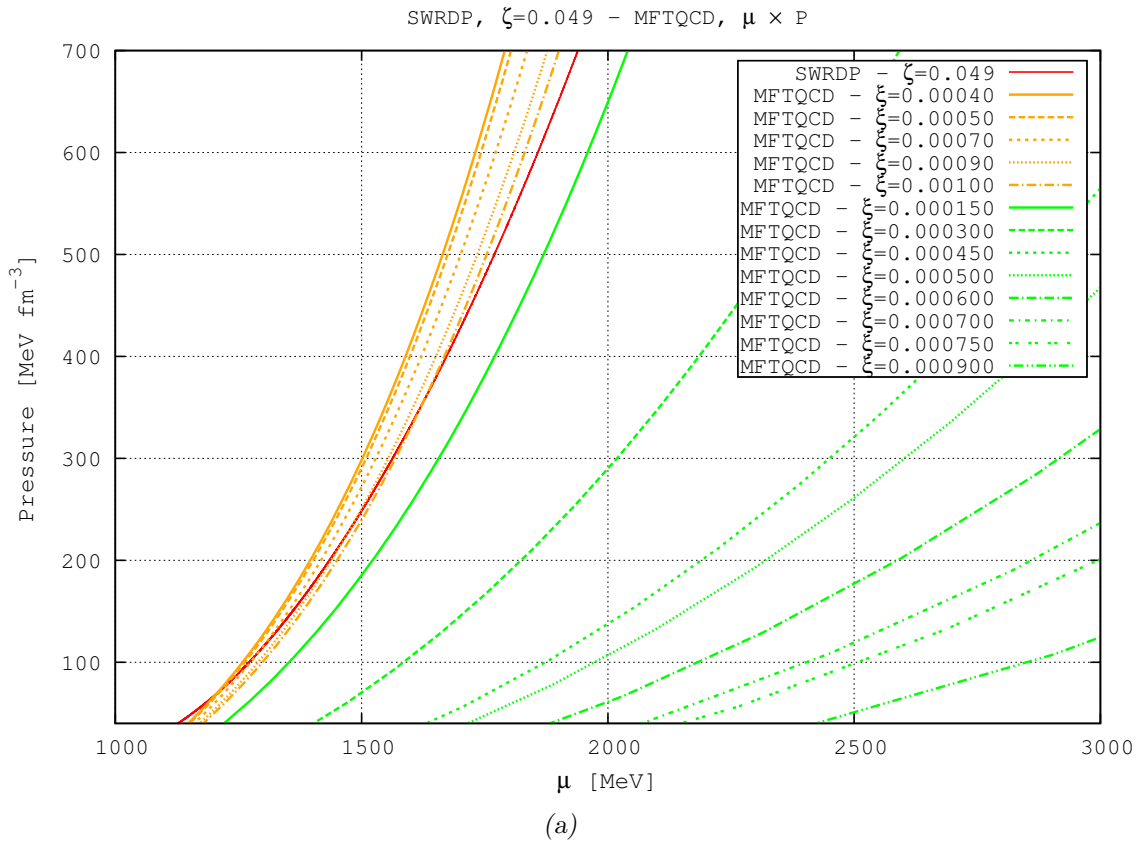


Figura 7.6: Equações de estado SWRDP( $\zeta = 0.049$ ) + MFTQCD( $B_{QCD} = 90 \text{ MeV fm}^{-3}$ ): (a) Visão geral das equações de estado (b) Detalhe do ponto onde  $\mu_H = \mu_Q$

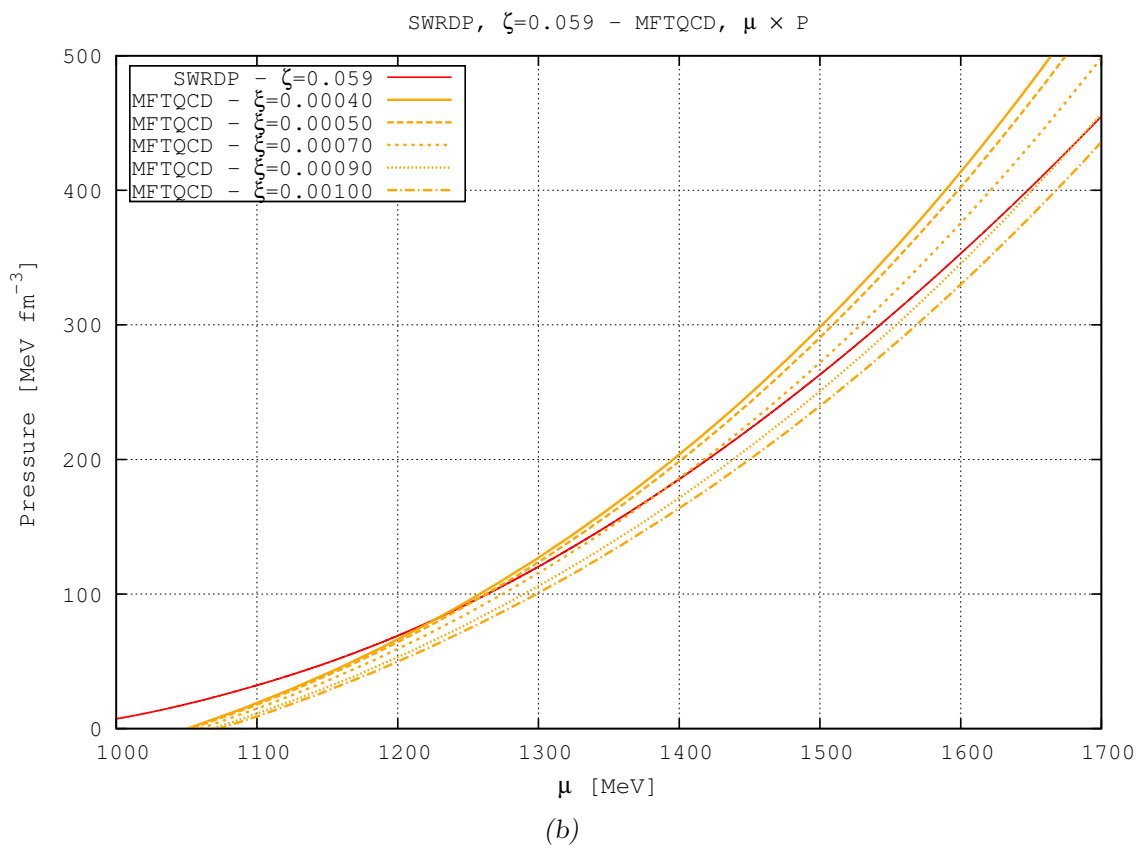
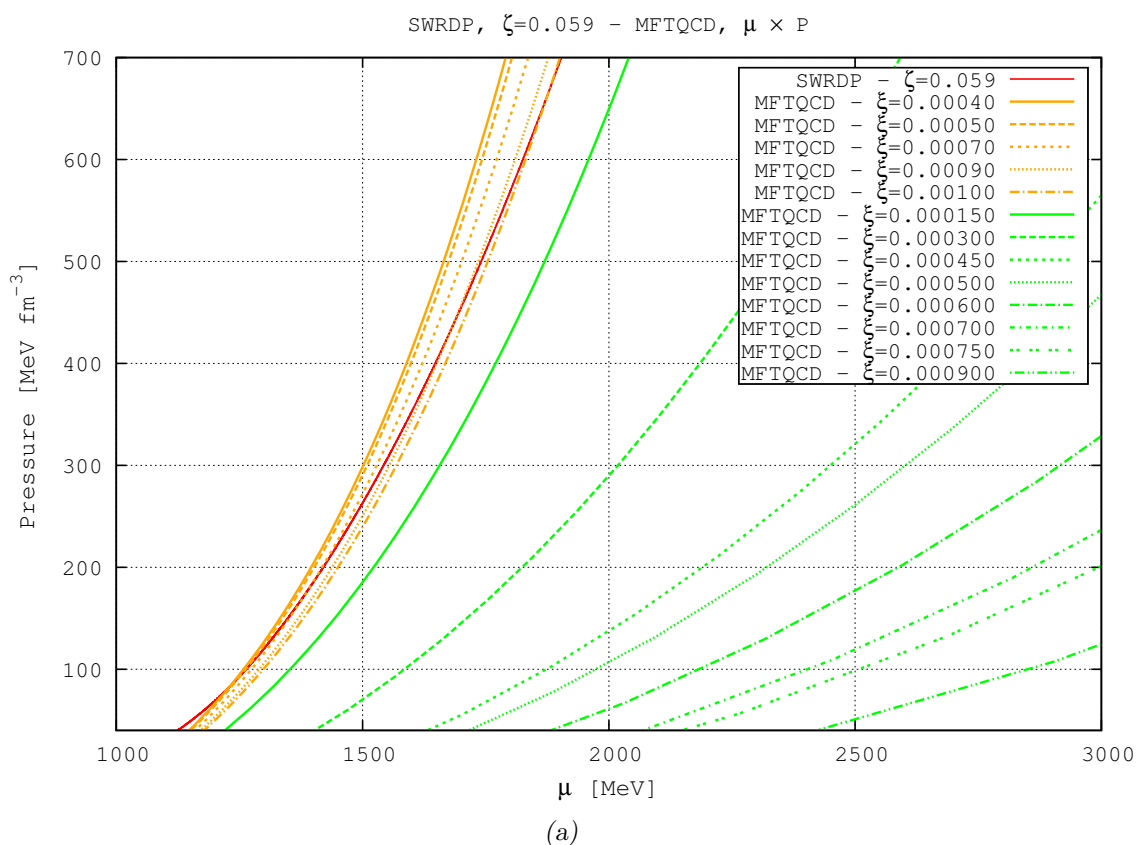


Figura 7.7: Equações de estado SWRDP( $\zeta = 0.059$ ) + MFTQCD( $B_{QCD} = 90 \text{ MeV fm}^{-3}$ ): (a) Visão geral das equações de estado (b) Detalhe do ponto onde  $\mu_H = \mu_Q$

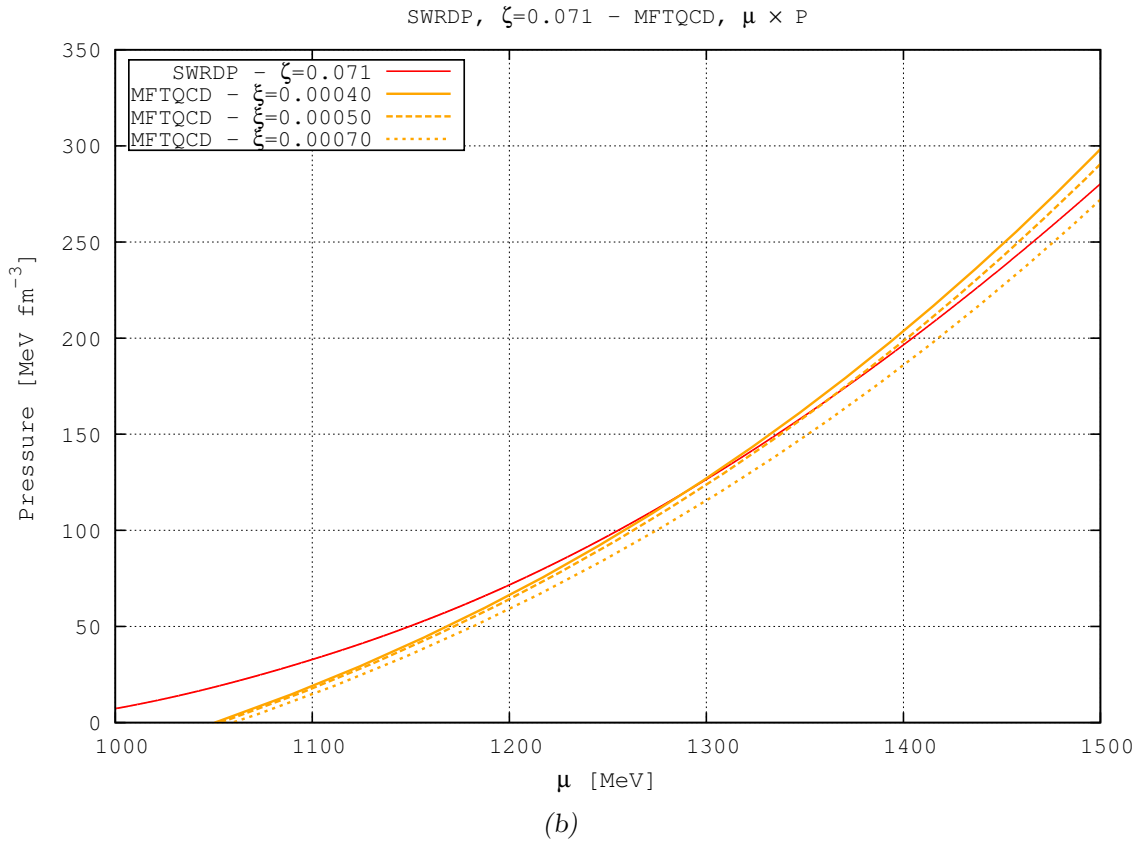
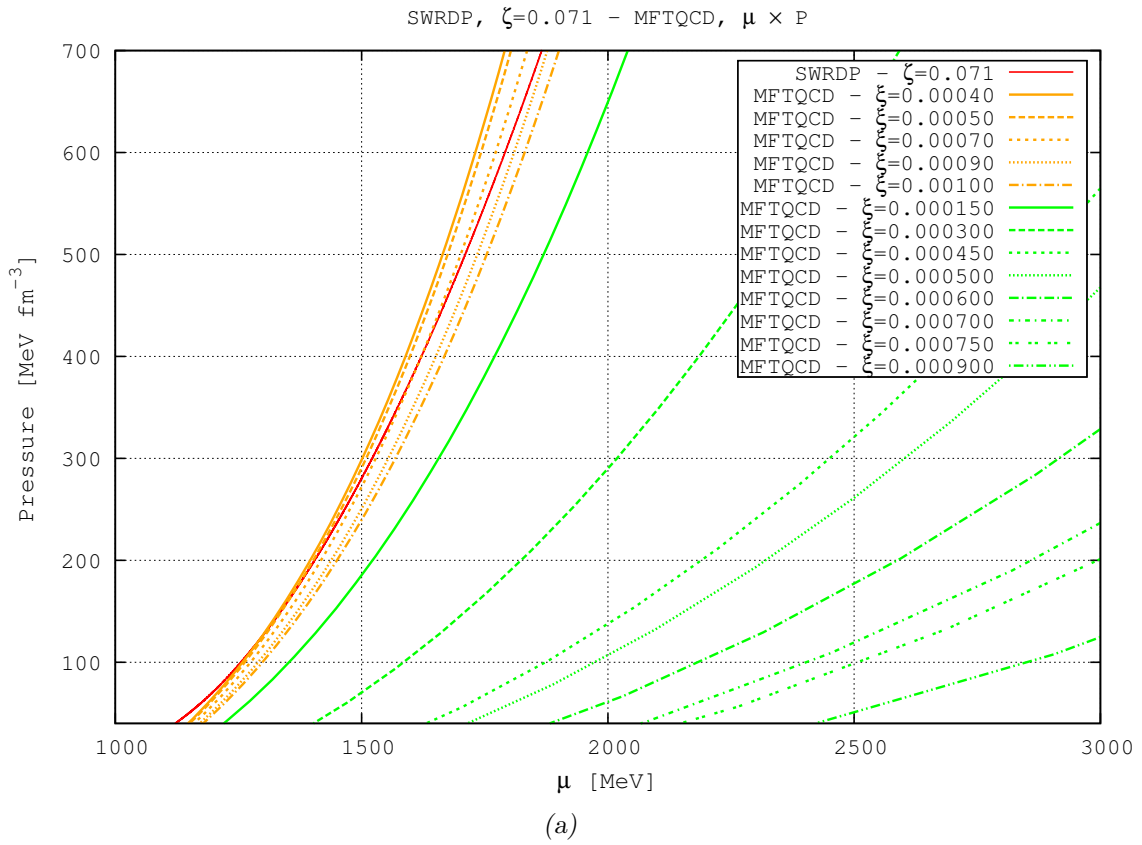


Figura 7.8: Equações de estado SWRDP( $\zeta = 0.071$ ) + MFTQCD( $B_{QCD} = 90 \text{ MeV fm}^{-3}$ ): (a) Visão geral das equações de estado (b) Detalhe do ponto onde  $\mu_H = \mu_Q$

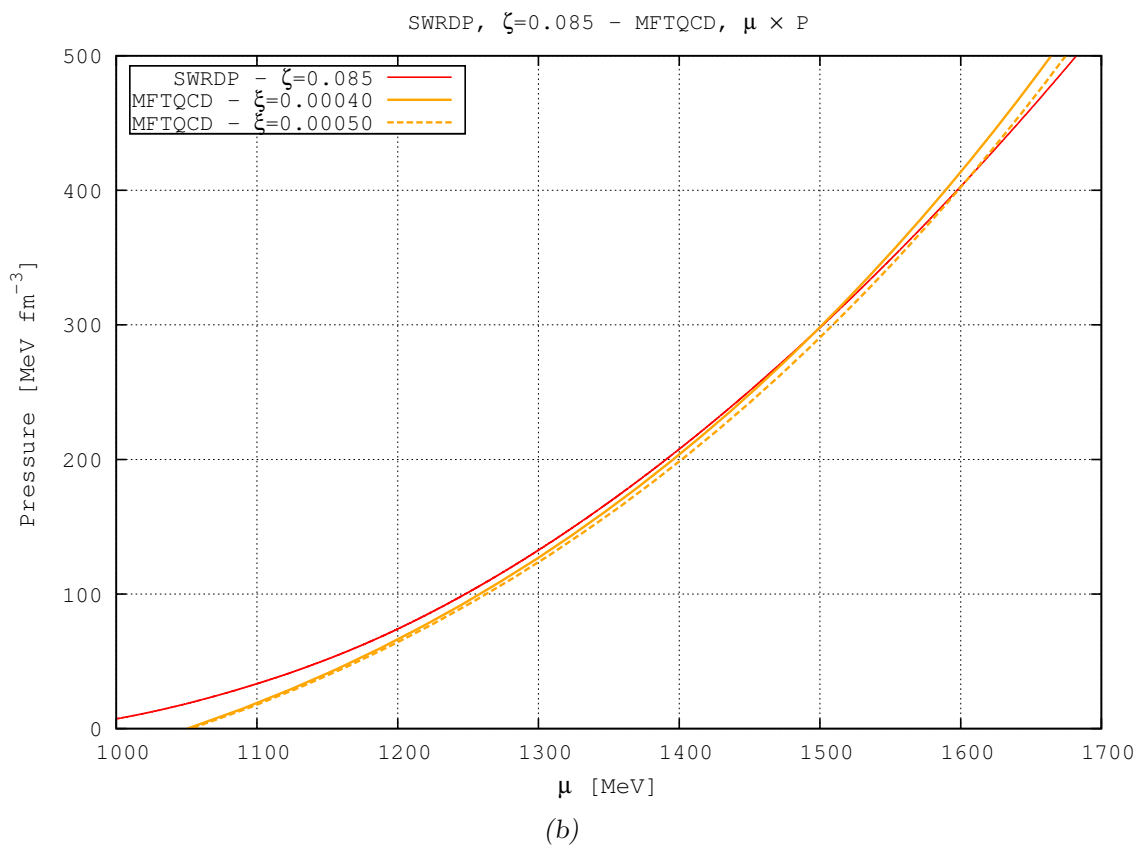
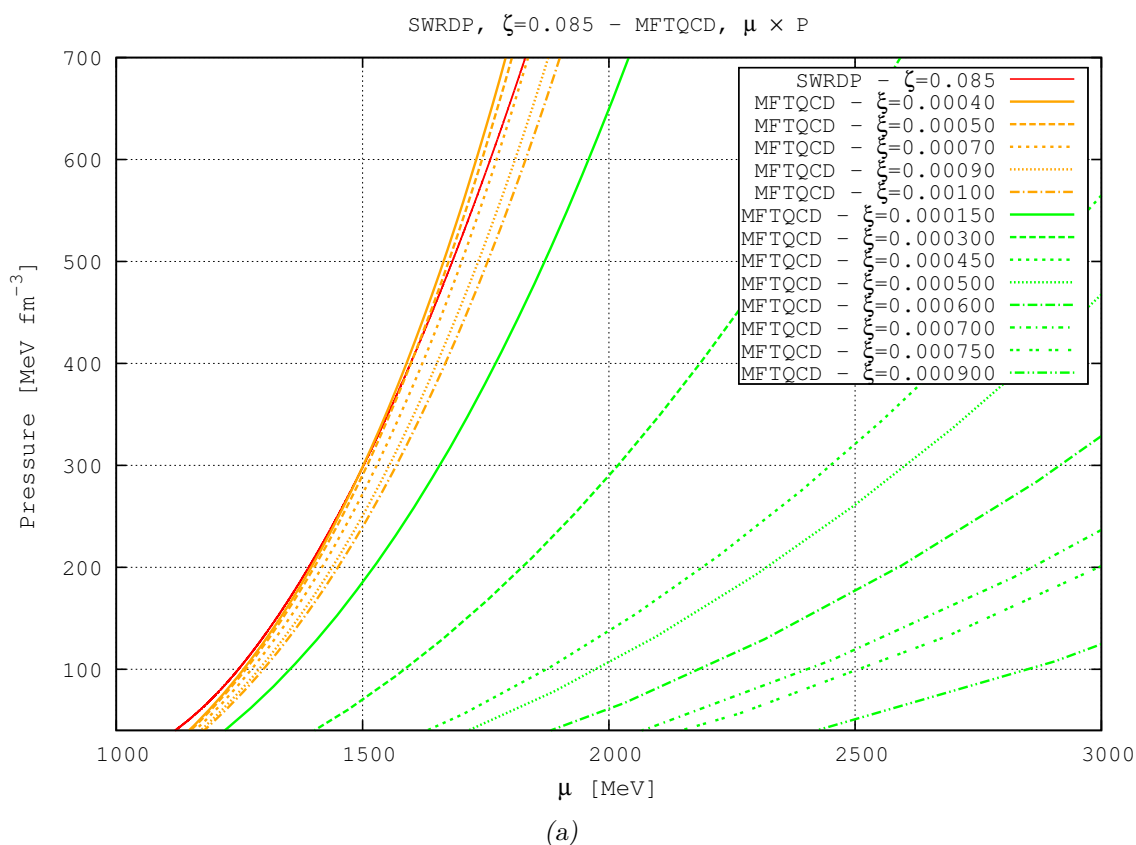


Figura 7.9: Equações de estado SWRDP( $\zeta = 0.085$ ) + MFTQCD( $B_{QCD} = 90 \text{ MeV fm}^{-3}$ ): (a) Visão geral das equações de estado (b) Detalhe do ponto onde  $\mu_H = \mu_Q$

De acordo com o que foi visto na Sec.6.2, utilizou-se a construção de Maxwell para obter uma equação de estado híbrida da matéria nuclear e matéria de quarks. Foi desenvolvido o programa *eos.maxwell.construction* (Apêndice D), que recebe como dados de entrada as equações de estado tabeladas nucleares e de quarks e determina o ponto da equação de estado que satisfaz os critérios de Maxwell em um regime de temperatura nula,

$$\mu_H = \mu_Q \tag{7.1}$$

$$P_H = P_Q, \tag{7.2}$$

que identificam o ponto onde ocorre a transição de fase. Entre os dois pontos, se estabelece uma aproximação linear que identifica o ponto de pressão constante. As equações de estado resultantes do procedimento são mostradas nas Figs.7.10-7.12.



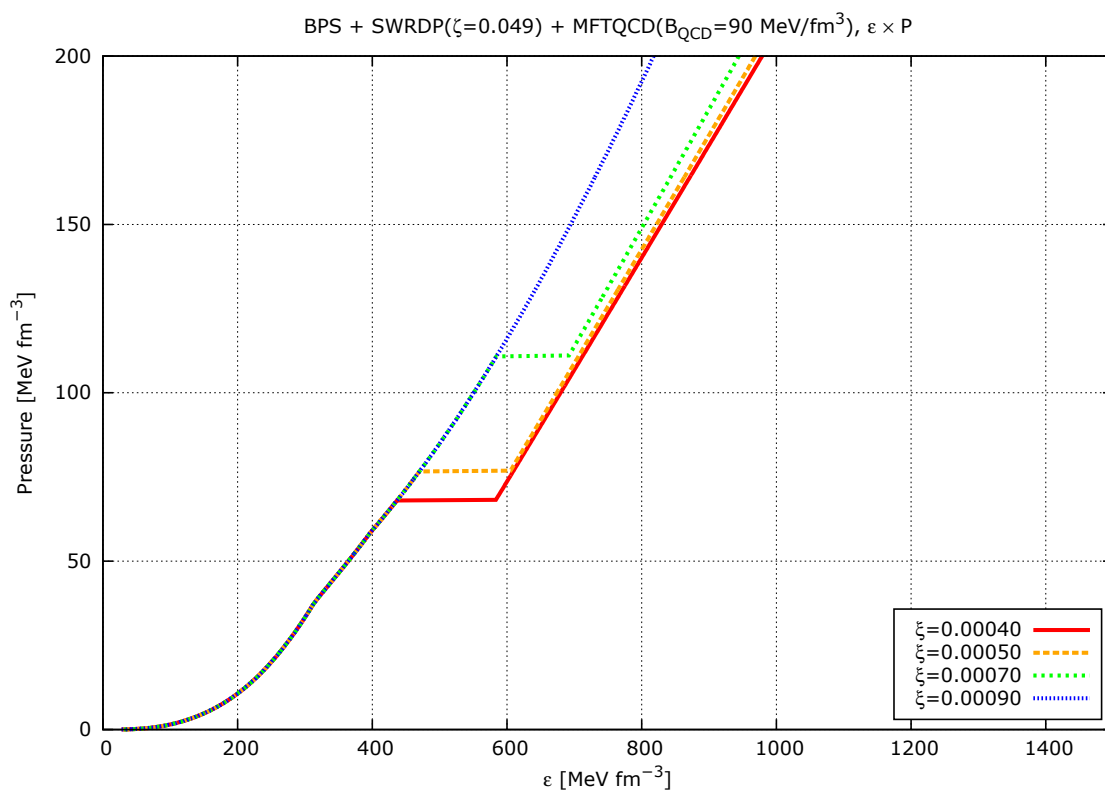
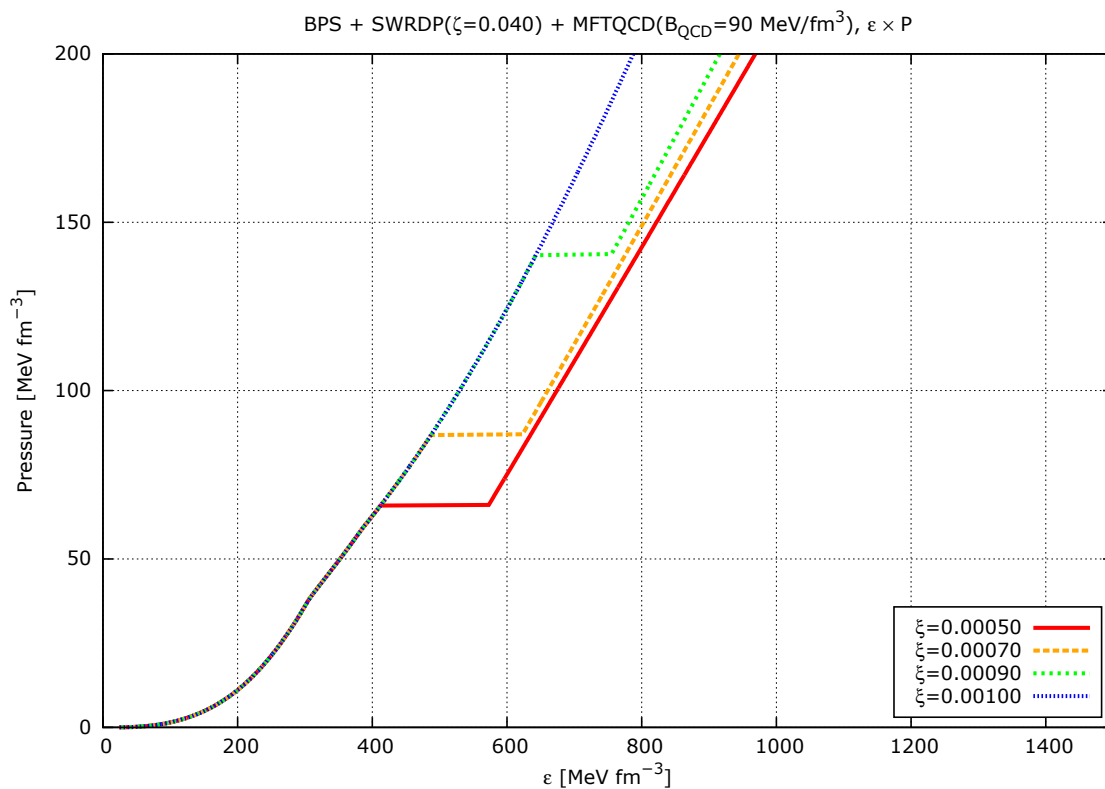


Figura 7.10: Equação de estado BPS+SWRDP+MFTQCD, para parâmetros  $\zeta = 0.040$ (a) e  $\zeta = 0.049$ (b).

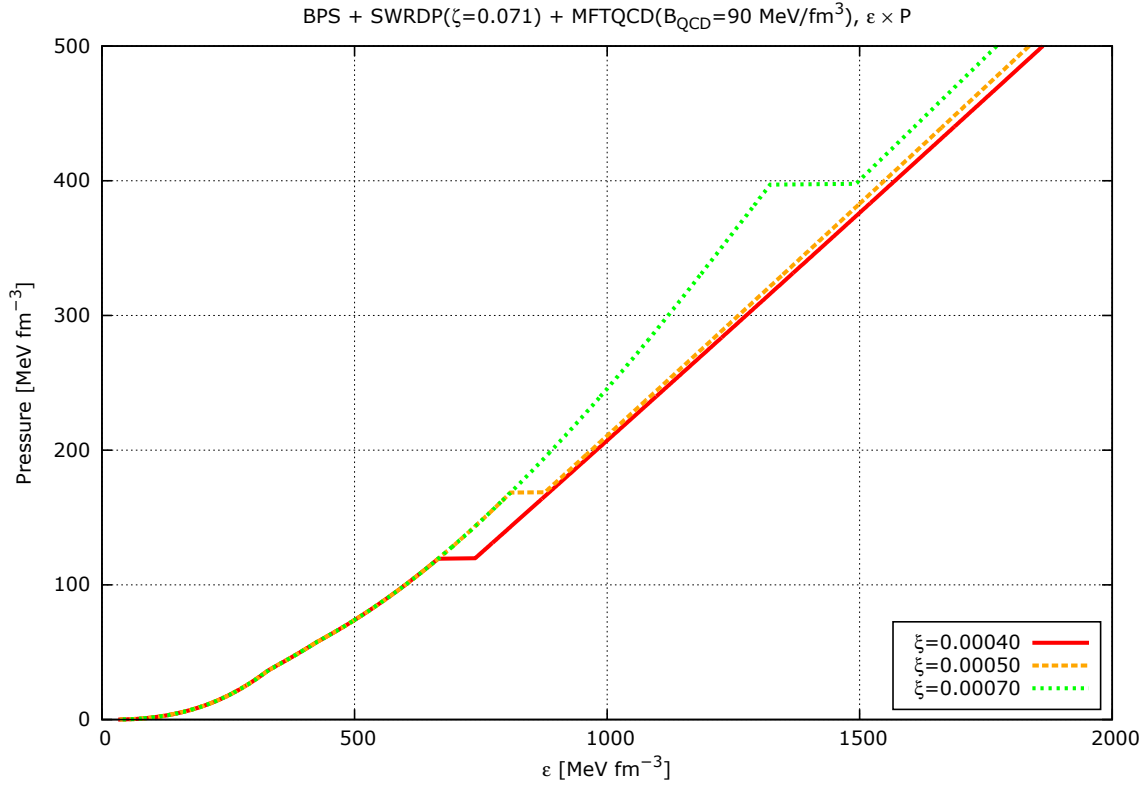
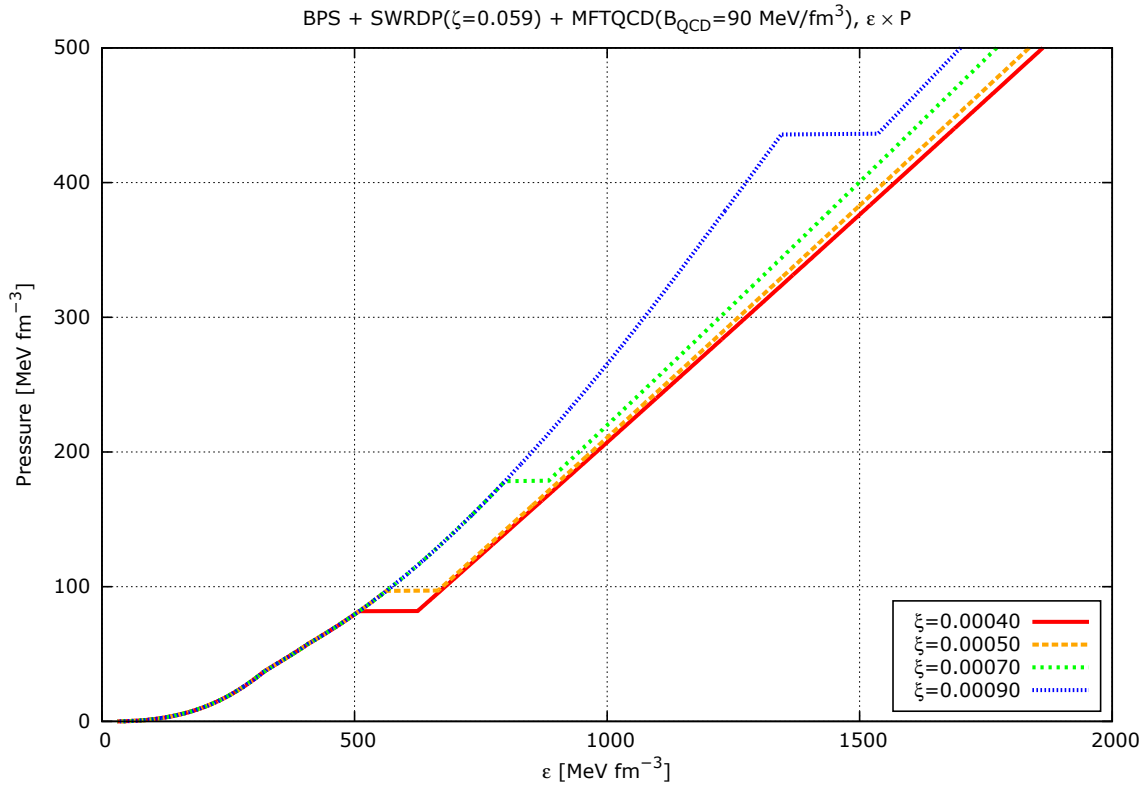


Figura 7.11: Equação de estado BPS+SWRDP+MFTQCD, para parâmetros  $\zeta = 0.059$ (a) e  $\zeta = 0.071$ (b).

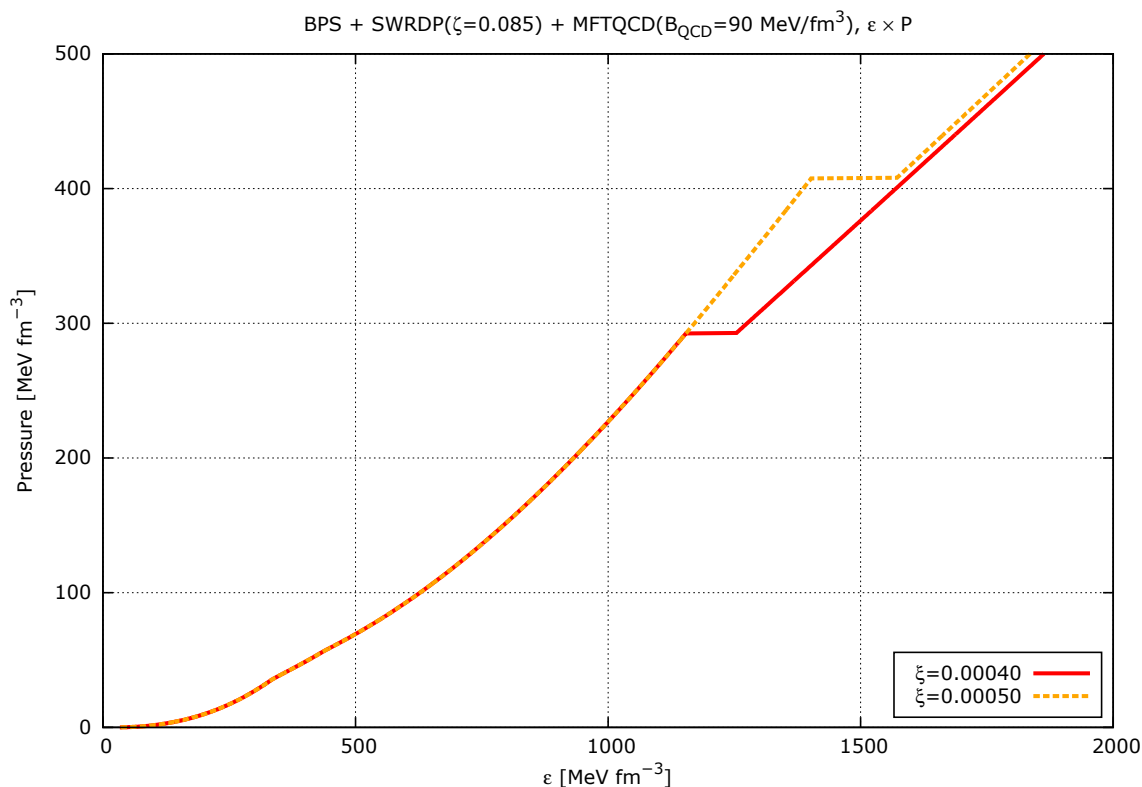


Figura 7.12: Equação de estado BPS+SWRDP+MFTQCD, para parâmetro  $\zeta = 0.085$ .

### 7.1.3 Modelos Estelares - Diagrama Massa-Raio

Nesta seção estamos interessados nas propriedades estáticas globais as estrelas, tal como suas massas e raios associados, e comparar os resultados obtidos com medições mais recentes de massas de pulsares, mais notadamente com os pulsares PSR J1614–2230 ( $M = 1.97 \pm 0.04M_{\odot}$ , Demorest et al. (2010)), e PSR J0348+0432 ( $M = 2.01 \pm 0.04M_{\odot}$ , Antoniadis et al. (2013)).

Aplicando o formalismo de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (Seção 3.2) implementado no programa *tousolver*, foram obtidos os diagramas massa-raio (Figuras 7.13-7.15) para as equações de estado representadas nas Figuras 7.10-7.12.

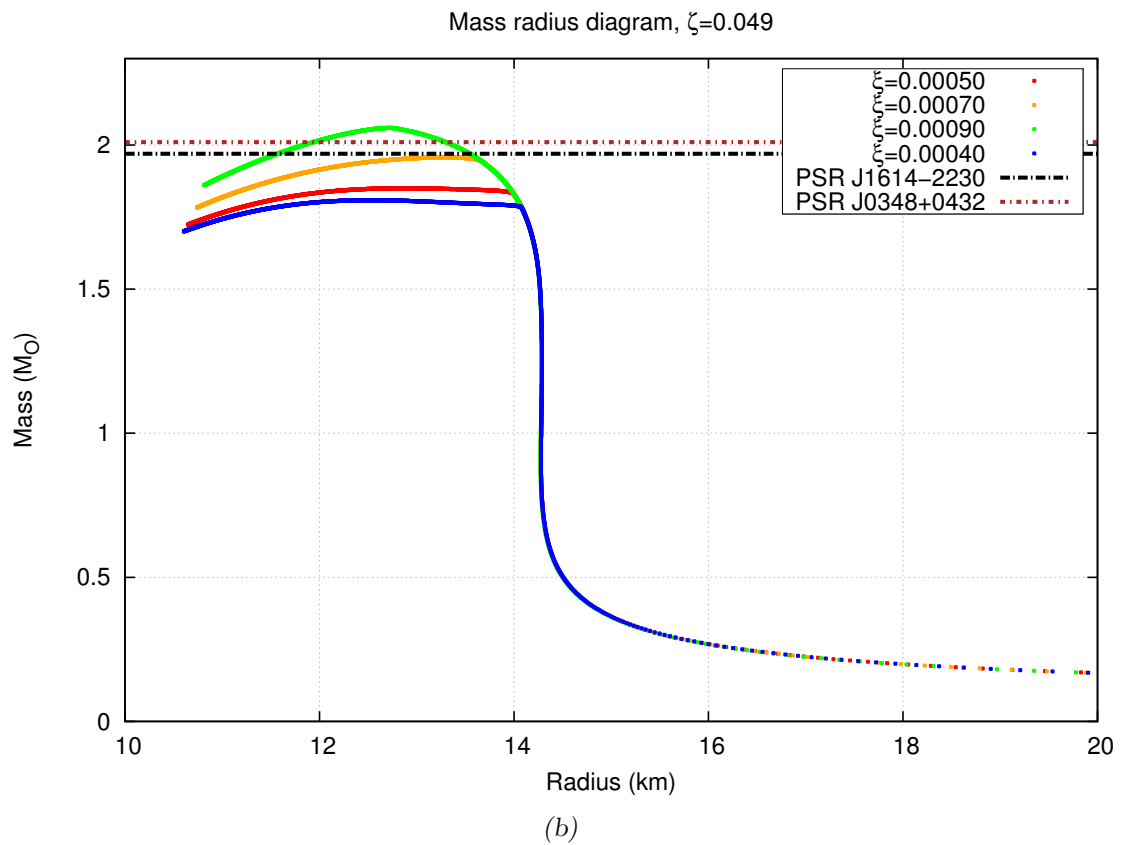
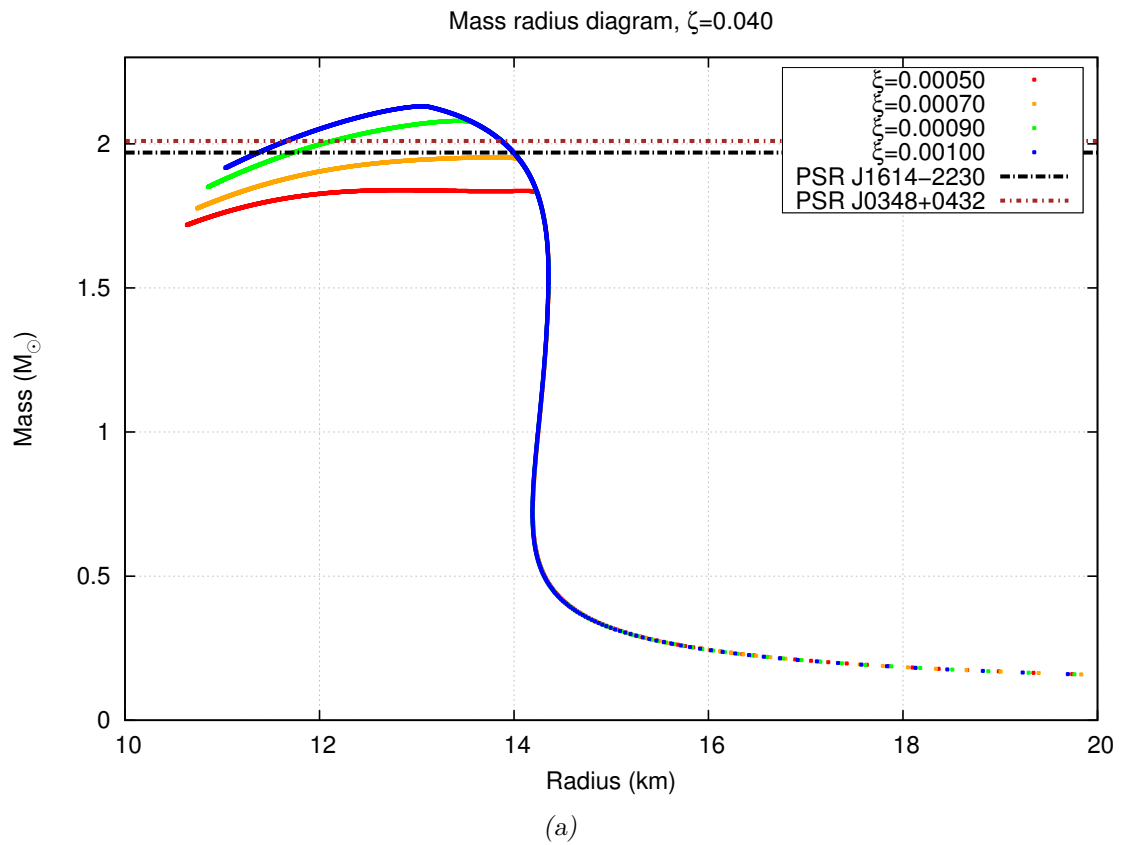


Figura 7.13: Diagrama massa-raio para estrelas híbridas no modelo BPS+SWRDP+MFTQCD, para parâmetros  $\zeta = 0.040$ (a) e  $\zeta = 0.049$ (b).

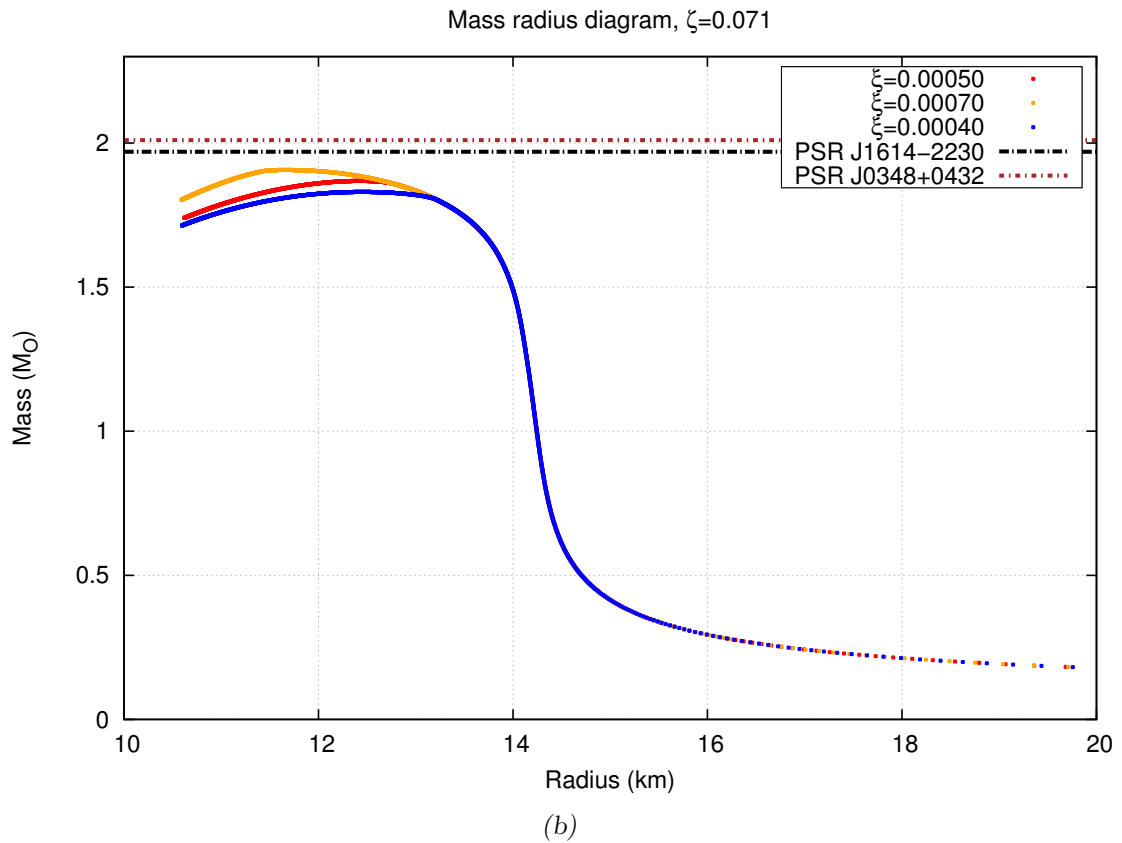
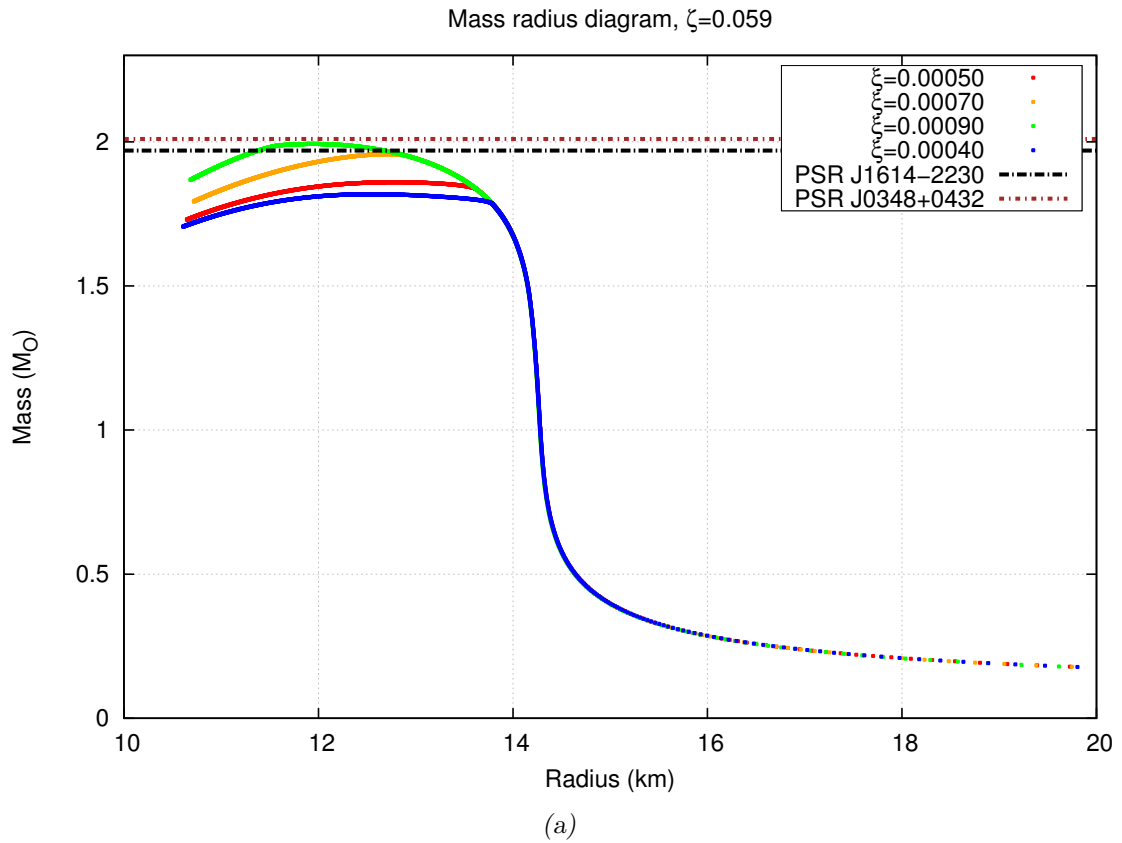


Figura 7.14: Diagrama massa-raio para estrelas híbridas no modelo BPS+SWRDP+MFTQCD, para parâmetros  $\zeta = 0.059$ (a) e  $\zeta = 0.071$ (b).

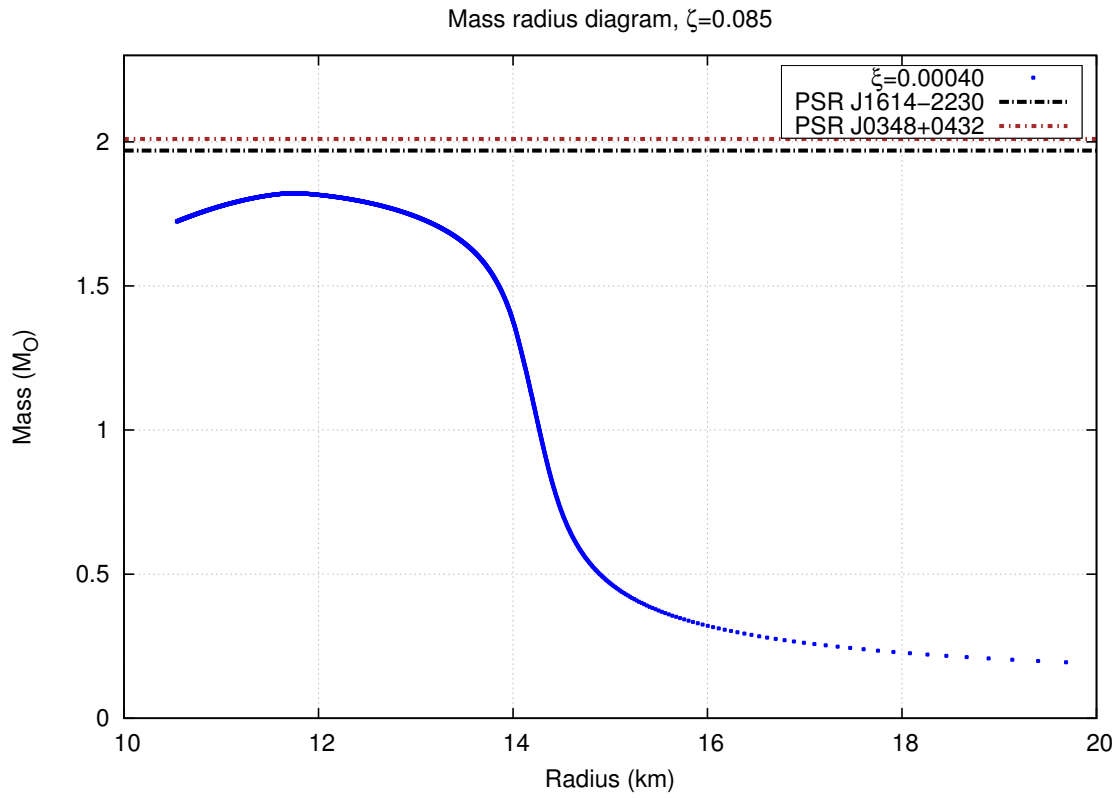


Figura 7.15: Diagrama massa-raio para estrelas híbridas no modelo BPS+SWRDP+MFTQCD, para parâmetro  $\zeta = 0.085$ .

Na tabela 7.1 são mostradas as massas máximas obtidas com as parametrizações da seção anterior.

Tabela 7.1 - Massas máximas das estrelas no modelo BPS+SWRDP+MFTQCD, com as variações de  $\zeta$ ,  $\xi$  e  $B_{QCD} = 90 \text{ MeV}/f\text{m}^3$ .

	$\zeta$	$\xi$	$M_{max}/M_{\odot}$	Raio $km$	Densidade central $MeV/fm^3$	Tipo
$\leftarrow$ MFTQCD : Stiffness : SWRDP $\rightarrow$	0.040	0.00050	1.84	12.82	936	Híbrida
		0.00070	1.95	13.81	698.8	Híbrida
		0.00090	2.08	13.42	815.8	Híbrida
		0.00100	2.13	13.06	936.7	Híbrida
	0.049	0.00040	1.81	12.53	1013.2	Híbrida
		0.00050	1.85	12.87	919	Híbrida
		0.00070	1.96	13.28	817.9	Híbrida
		0.00090	2.06	12.72	1014.6	Híbrida
	0.059	0.00040	1.82	12.55	999	Híbrida
		0.00050	1.86	12.79	933.9	Híbrida
		0.00070	1.96	12.71	970.45	Híbrida
		0.00090	1.99	11.94	1167.9	Hadrônica
	0.071	0.00040	1.83	12.45	1013.2	Híbrida
		0.00050	1.87	12.43	1024.8	Híbrida
		0.00070	1.91	11.66	1245.8	Hadrônica
	0.085	0.00040	1.82	11.76	1272.9	Híbrida

Em uma primeira análise, comparando as curvas massa-raio dos modelos estudados com as massas dos pulsares, temos que a massa do pulsar PSR J1614–2230 pode ser alcançada através da seguinte combinação de parametrizações dos modelos SWRDP e MFTQCD:  $\zeta = 0.040$  e  $\xi = \{0.00070, 0.00090, 0.00100\}$ ;  $\zeta = 0.049$  e  $\xi = \{0.00070, 0.00090\}$ ; e  $\zeta = 0.059$  e  $\xi = \{0.00070, 0.00090\}$ ; e a massa do pulsar PSR J0348+0432 só pode ser alcançada através da seguinte combinação de parametrizações:  $\zeta = 0.040$  e  $\xi = \{0.00090, 0.00100\}$ ;  $\zeta = 0.049$  e  $\xi = 0.00090$ ; e  $\zeta = 0.059$ ,  $\xi = 0.00070$ . Antes de analisar estes resultados, faz-se uma breve recapitulação o que cada parâmetro significa:

- Parâmetro livre da SWRDP  $\zeta$ : Está associado às forças de muitos corpos e restrito à descrever a massa efetiva do núcleon  $m_N^*$  na saturação entre 0.66-0.78  $m_N$ . Valores menores deste parâmetro geram equações de estado mais duras.
- Parâmetro livre da MFTQCD  $\xi$ : Este parâmetro está ligado diretamente à interação dos hard glúons com os quarks. Valores maiores indicam que esta interação é mais importante. Fisicamente o termo representa correções perturbativas à abordagem do

modelo de sacola do MIT. Ainda, de acordo com o que pode ser verificado visualmente na Fig.7.2, valores maiores geram equações de estado mais duras, o oposto do parâmetro livre da equação de estado SWRDP.

Analisando estes valores dentro do espaço de parâmetros das equações de estado (Gomes et al., 2015; Fogaça e Navarra, 2011), conclui-se que no modelo híbrido, em ambos os casos a massa dos dois pulsares foi alcançada utilizando-se uma equação de estado hadrônica com parâmetro  $\zeta$  assumindo um valor intermediário. Com relação à equação de estado de CQM, vê-se que o parâmetro  $\xi$  válido para alcançar tais massas se encontra na parte superior do espaço de parâmetros, ou seja um núcleo de quarks mais duro, com a ressalva que este valor, apesar de ser o maior dentro do espaço de parâmetros utilizados, ainda é menor do que o utilizado no estudo de Franzon et al. (2012). Ou seja, comparativamente, o valor de  $\xi$  usado no presente estudo gera uma equação de estado menos dura que os utilizados em outros estudos.

## 7.2 Modelo QCDIRE

Na Fig. 7.16 se vê o comportamento da equação de estado QCDIRE. Como visto na Seção 5.4, o modelo utiliza a propriedade de violação de positividade de reflexão do propagador do quark, que em termos gerais quer dizer que a equação de estado é baseada na QCD e tenta obter o confinamento dos quarks sem introduzir nenhuma repulsão *ad hoc*.

Na tentativa de criar um modelo híbrido que conecte a equação de estado hadrônica utilizada neste tese com o modelo QCDIRE, mostramos que isto não é possível. A simples visualização das equações de estado no mesmo gráfico (Fig. 7.17) mostram que uma equação híbrida com pressão constante no ponto de transição de fase, para qualquer ponto, resultaria em um  $\Delta\varepsilon < 0$ , que de acordo com Alford et al. (2013) viola um dos critérios de estabilidade das estrelas híbridas.

### 7.2.1 Modelos Estelares - Diagrama Massa-Raio

Apesar da limitação, damos sequência ao estudo da equação de estado analisando seu diagrama massa-raio.

Com relação à este modelo, por não haver nenhuma parametrização, não foi possível criar um modelo híbrido. A equação de estado não permite nenhuma transição de fases



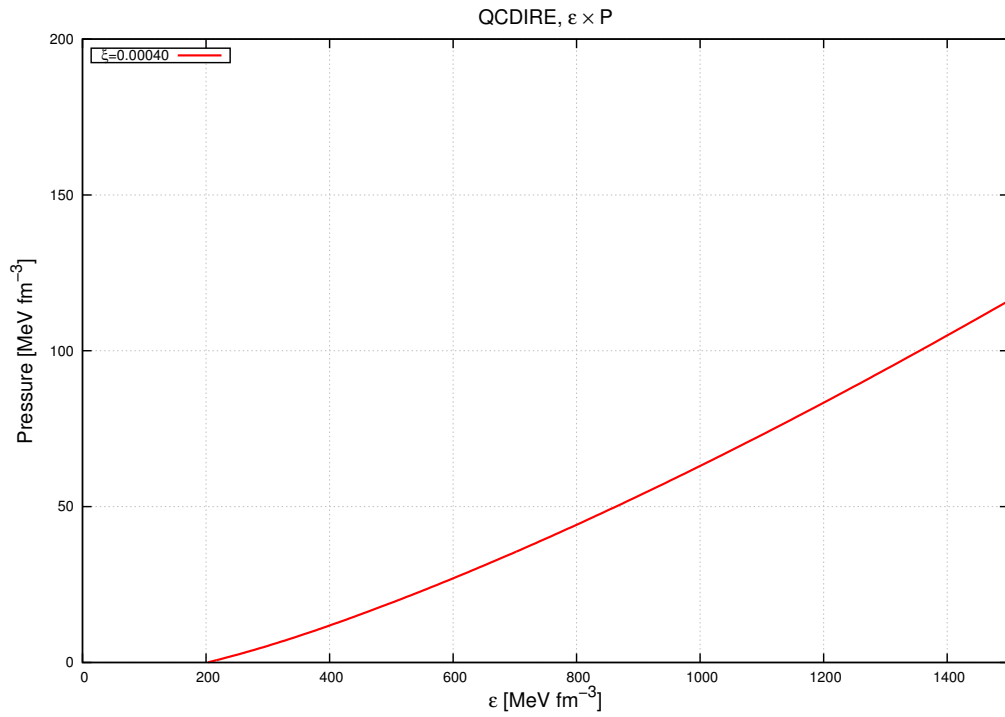


Figura 7.16: Equação de estado QCDIRE.

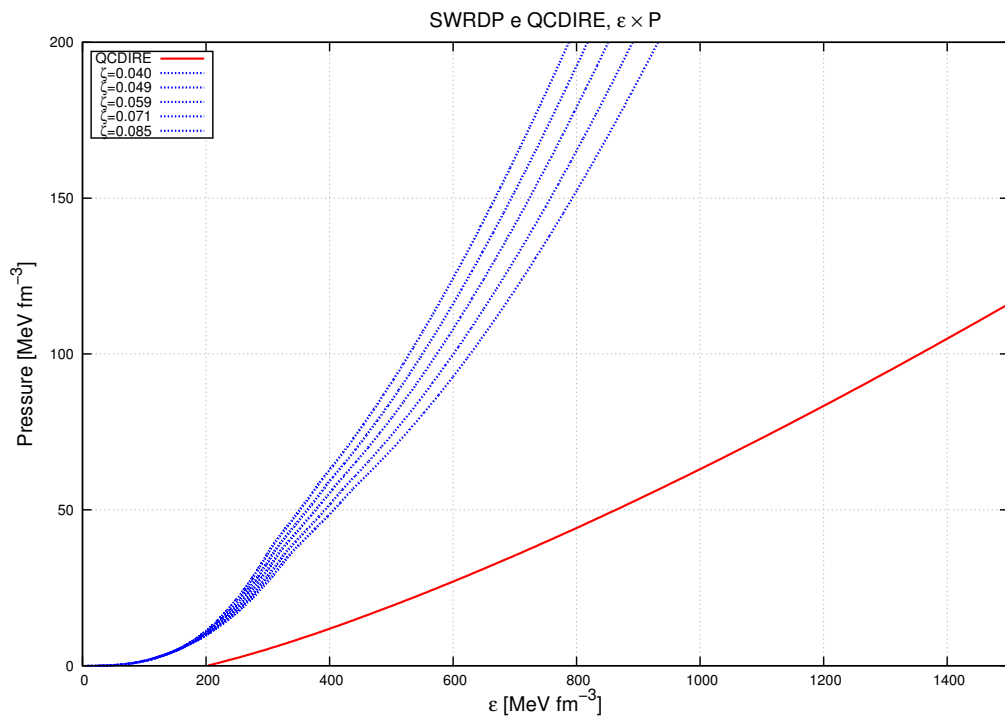


Figura 7.17: Equação de estado SWRDP e QCDIRE.

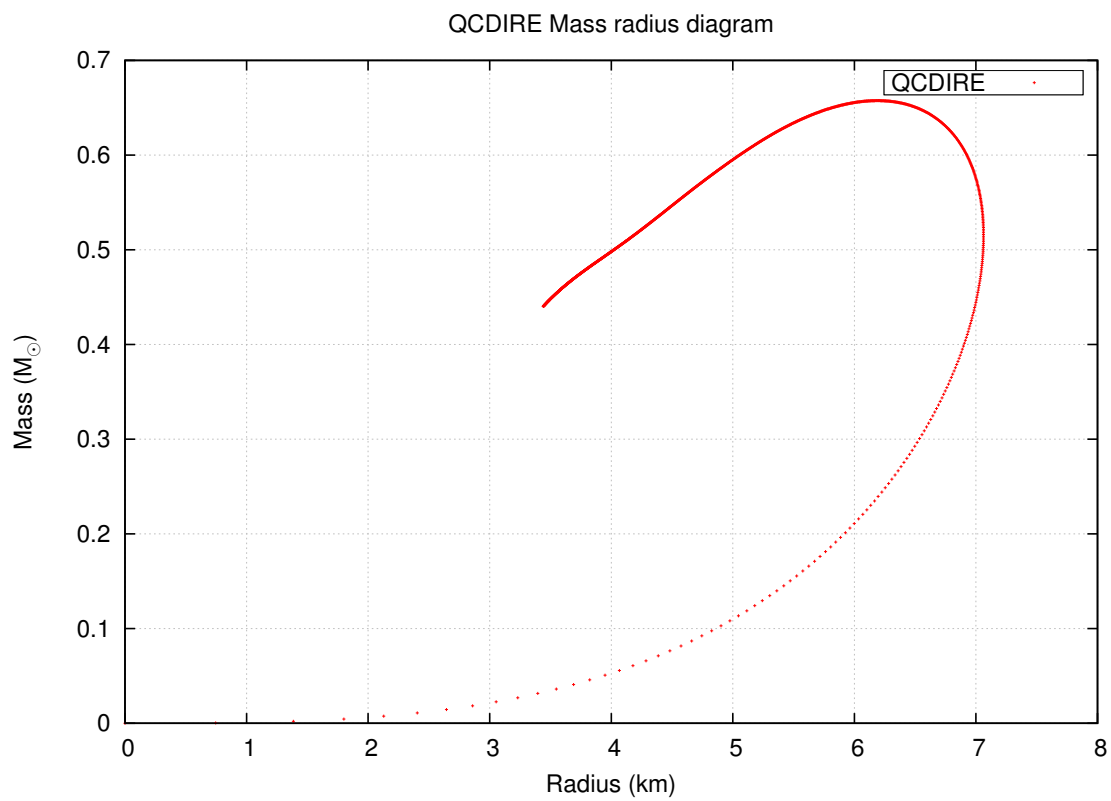


Figura 7.18: Relação massa-raio com a equação de estado QCDIRE.

como o modelo hadrônico utilizado e não permite massas maiores que  $0.66 M_{\odot}$ .

## Entropia e Teoria da Informação

Só a entropia chega facilmente.

---

Anton Chekhov

Este capítulo é devotado ao estudo de duas manifestações de entropia nas estrelas de nêutrons: a entropia de Boltzmann e a entropia da informação, ou de Shannon. Na primeira parte, são detalhados as fontes de entropia da estrela de nêutrons em 3 fases distintas e o procedimento para o cálculo, que é um resumo do que foi publicado pelo grupo de estudo de objetos compactos do IAG em de Avellar et al. (2016). Em seguida, é apresentada a teoria da informação, e a mesma é aplicada ao estudo dos modelos estelares vistos no Capítulo 7.

### 8.1 *Evolução da Entropia nas Estrelas de Nêutrons*

A entropia é uma função matemática que codifica o macro-estado termodinâmico de um sistema físico construído a partir da descrição estatística deste sistema. As obras clássicas de Gibbs e Boltzmann esclareceram o significado da entropia e sugeriu que a mesma também está relacionada ao grau de desordem de um sistema, relacionado principalmente às analogias de capacidade de calor com sólidos, líquidos e gases. A entropia direciona a evolução termodinâmico de um sistema no tempo; e está relacionado com a quantidade de energia, incluindo o calor, que está disponível para realizar trabalho de acordo com Clausius e outros contemporâneos.

Afirma-se frequentemente que a entropia desempenha um papel fundamental em qualquer processo no Universo, e por meio de seu estudo que podemos alcançar uma melhor compreensão do destino do Universo e o que o compõe. O Universo contém várias estrutu-

ras diferenciadas do maior para o menor escalas, e é precisamente nas de menor escala que iremos estudar as relações de entropia no objeto desta tese, que são as estrelas de nêutrons.

### 8.1.1 Entropia nas Estrelas de Nêutrons

Estrelas de nêutrons são formadas pelo colapso de uma estrela massiva da ordem de  $8 - 25M_{\odot}$ , resultando em um objeto compacto de  $\geq 1.2M_{\odot}$  e  $R \sim 10km^1$ . É suposto que estrelas de nêutrons possuam a mesma composição desde que os estados da queima de gás alcancem o limite do *Fe*, a partir de onde os processos exotérmicos não são mais possíveis. Então, com o *Fe* como ponto de partida do próximo passo da evolução estelar, o núcleo se contrai iniciando uma nova fase da matéria densa (ver Seção 2).

Aqui, foram calculadas as entropias das estrelas de nêutrons associadas à três momentos distintos: proto-estrela de nêutrons onde a temperatura é assumida como  $T \sim 5 \times 10^{11}K$  e  $R_{PNS} \sim 55.75 km$  (aproximadamente cinco vezes o raio da estrela de nêutrons em estágio de desenvolvimento mais avançado, devido inteiramente à fase quente da estrela); um estado posterior, estacionário e quente, com temperatura da ordem de  $T = 1 \times 10^9K$  e  $R_{NS} \simeq 11.15 km$ , que se estabelece no máximo algumas horas após a formação; e a fase estacionária e fria com temperaturas da ordem de  $T = 1 \times 10^7K$  and  $R_{NS} \simeq 11.15 km$  representando o esfriamento da uma estrela de nêutrons isolada após  $\sim 10^6$  anos aproximadamente.

O estado da matéria dentro das estrelas de nêutrons difere radicalmente em suas fases distintas. Nas proto-estrelas de nêutrons, os elétrons ainda são degenerados (a temperatura de Fermi nesta configuração é da ordem de  $T_{Fe-} \sim 10^{13}K$ ), porém o gás de nêutrons ainda pode ser considerado não-degenerado, com alguma correção de degenerescência (a temperatura de Fermi neste estado é de  $T_{Fions} \sim 5 \times 10^{10}K$ ).

Assim, a entropia de uma proto-estrela de nêutrons <sup>2</sup> é dada pela entropia dos elétrons degenerados mais a entropia de um gás de Boltzmann de nêutrons:

$$S_{PNS} \simeq 2.96 \times 10^{42} erg/K \text{ ou } S \rightarrow \frac{S}{k_b N} = 13.32.$$

<sup>1</sup> Outra possível maneira de formar uma estrela de nêutrons é via processos de acreção induzida por uma anã branca (van den Heuvel 2011).

<sup>2</sup> Aqui o raio utilizado foi  $R_{PNS} = 5R_{NS}$ , onde  $R_{NS} = 11.15 km$ ; que emula o estágio quente pré-resfriamento

Após a fase de proto-estrela de nêutrons, a estrela entra em equilíbrio e rapidamente resfria via emissão de neutrinos. Os modelos estelares para estrelas de nêutrons advém da solução das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (Seção 3.2) complementado pela equação de estado Sly4 (Haensel e Potekhin, 2004), escolha feita pelo fato da equação de estado ser adequada para estrelas compactas compostas de matéria rica de nêutrons com interações. Foi selecionada uma estrela com  $N = 1.6 \times 10^{57}$  bárions que corresponde à uma massa (gravitacional) de  $M \simeq 1.23M_{\odot}$  e raio  $R = 11.15 \text{ km}$ , mostrando os efeitos da forte gravidade nestes objetos através de uma baixa massa total.

Assumindo uma temperatura de  $T_{NS} \sim 1 \times 10^9 K$  no estágio seguinte, os nêutrons se tornam degenerados e suportam estrela contra o colapso posterior. Neste caso a entropia da estrela é dada por nêutrons degenerados (onde a pequena fração de elétrons e prótons originados do equilíbrio  $\beta$  foi ignorada):

$$S_{NS} = \frac{\pi^2(x_n^2 + 1)^{1/2} N k_b \left( \frac{k_b T_{NS}}{m_n c^2} \right)}{x_n^2}, \quad (8.1)$$

onde  $x_n \equiv \frac{p_{fn}}{m_n c}$  e  $p_{fn}$  é o momento de Fermi do mar de nêutrons.

A entropia é dada então por:

$$S_{NS_{hot}} \simeq 1.21 \times 10^{39} \text{ erg/K} \quad \text{or} \quad S \rightarrow \frac{S}{k_b N} = 5.45 \times 10^{-3}.$$

Conforme a estrela de nêutrons resfria, eventualmente alcançando a temperatura de  $T_{NS} \sim 1 \times 10^7 K$  no caroço, a entropia decresce até

$$S_{NS_{cold}} \simeq 1.21 \times 10^{37} \text{ erg/K} \quad \text{or} \quad S \rightarrow \frac{S}{k_b N} = 5.45 \times 10^{-5}.$$

Neste estágio, o decrescimento da entropia é dado principalmente pela emissão de fótons. Para um estudo completo sobre a evolução da entropia nos vários estágios da vida estelar, ver de Avellar et al. (2016) e o Apêndice C.

## 8.2 Teoria da Informação

A Teoria da Informação tem sido aplicada em inúmeros sistemas, desde a cosmologia, passando por sistemas biológicos, matéria condensada, comunicações (seu uso original), até linguística. A Teoria da Informação é baseada no conceito da entropia de Shannon

(Shannon e Weaver (1949)) (também conhecido como entropia da informação ou entropia lógica), que é relacionada aos *bits* de informação armazenada no sistema. Ela pode ser utilizada como a medida da incerteza associada com o valor de uma quantidade física. A entropia de Shannon é definida pela quantidade

$$S = -K \sum_x p(x) \log_b [p(x)] \quad (8.2)$$

onde  $p(x)$  é a distribuição de probabilidade da variável a ser medida, e a base  $b$  e a constante  $K$  determina o tipo de entropia sendo calculada. No caso específico da entropia de Shannon,  $K = 1$  e  $b = 2$ , resultando que o a unidade da entropia é chamado de ‘bit’. À título de exemplo, se tomarmos  $b = e$ , a unidade de entropia passa a ser (por definição) o ‘nat’. Ainda, fazendo  $K = k_B$  (constante de Boltzmann), com  $b = e$ , a entropia coincide com a entropia termodinâmica. Porém esta relação não deve ser tomada a estrito senso, pois o significado de  $p(x)$  pode ser diferente para cada caso, pois no caso termodinâmico esta probabilidade está relacionada a probabilidade de um dado estado microscópico do sistema estar associado à uma configuração de energia específica. Assim, informação é o que podemos inferir da observação de ocorrência de um evento, ou então podemos defini-la em termos da probabilidade de um evento ocorrer. Outra característica é que a Teoria da Informação lida com *qualquer* tipo de probabilidade.

Segundo a definição da informação  $I(p)$  dada por Shannon, se cumprem as seguintes propriedades matemáticas:

1.  $I(p) \geq 0$ ,
2.  $I(p_1 \cdot p_2) = I(p_1) + I(p_2)$  (aditividade),
3.  $I(p)$  é monotônica e continua em  $p$ ,
4.  $I(1) = 0$ ,

de onde deduzimos que informação é dada por

$$I(p) = \log_b \left( \frac{1}{p} \right) = -\log_b(p) \quad (8.3)$$

Como exemplo, lançar uma moeda não viciada nos dá  $-\log_2(1/2) = 1$  bit de informação. Se alguma fonte nos provê  $n$  símbolos  $a_i$ , cada um com probabilidade  $p_i$ , então uma possi-

bilidade é estarmos interessados na quantidade média de informação no fluxo de símbolos, que chamamos de média ponderada. Assim:

$$\frac{I}{N} = \sum_{i=1}^N p_i \log \left( \frac{1}{p_i} \right) = - \sum_{i=1}^N p_i \log (p_i) \equiv H(P). \quad (8.4)$$

Esta quantidade é definida como a entropia de uma distribuição de probabilidade  $P = p_i$ , quantidade essa que é máxima quando a distribuição de probabilidade é equiprovável ( $p_i = 1/n$ ). A equação (8.2) pode ser generalizada para o caso contínuo:

$$S = -K \int_x p(x) \log_b [p(x)] \quad (8.5)$$

Na descrição de sistemas físicos, existe uma outra grandeza estatística relacionada à informação que é chamada de *complexidade* (Lopez-Ruiz et al. (1995)). Complexidade pode ser definida como a distância até a configuração mais simples. Na física, sempre se começa a estudar sistemas ideais como primeira aproximação à Natureza, justamente por serem simples, que por construção admite-se ter complexidade zero. Como exemplo tomemos dois sistemas ideais na Natureza, extremos e opostos: um cristal perfeito e o gás ideal:

1. No cristal perfeito, temos complexidade zero por definição. Regras de simetria implicam densidades de probabilidade centradas no estado de simetria perfeita, ou seja, informação mínima. Isso quer dizer que um mínimo de informação é necessário para descrever o sistema como um todo. O cristal perfeito é completamente ordenado.
2. O gás ideal por sua vez tem complexidade zero por definição: todos os estados acessíveis são equiprováveis, o que indica informação máxima possível. O sistema é totalmente desordenado.

Os exemplos acima deixam claro que apenas a informação não é suficiente para definir de maneira apropriada a complexidade de um sistema. Então, define-se como *desequilíbrio* a distância à equiprobabilidade. Assim podemos obter o que é chamado de ‘gráfico de intuição’, de acordo com a Fig.8.1.

Embora não exista uma única definição de complexidade, será adotada a definição dada por Lopez-Ruiz et al. (1995) e modificada por Catalán et al. (2002), já que concorda com

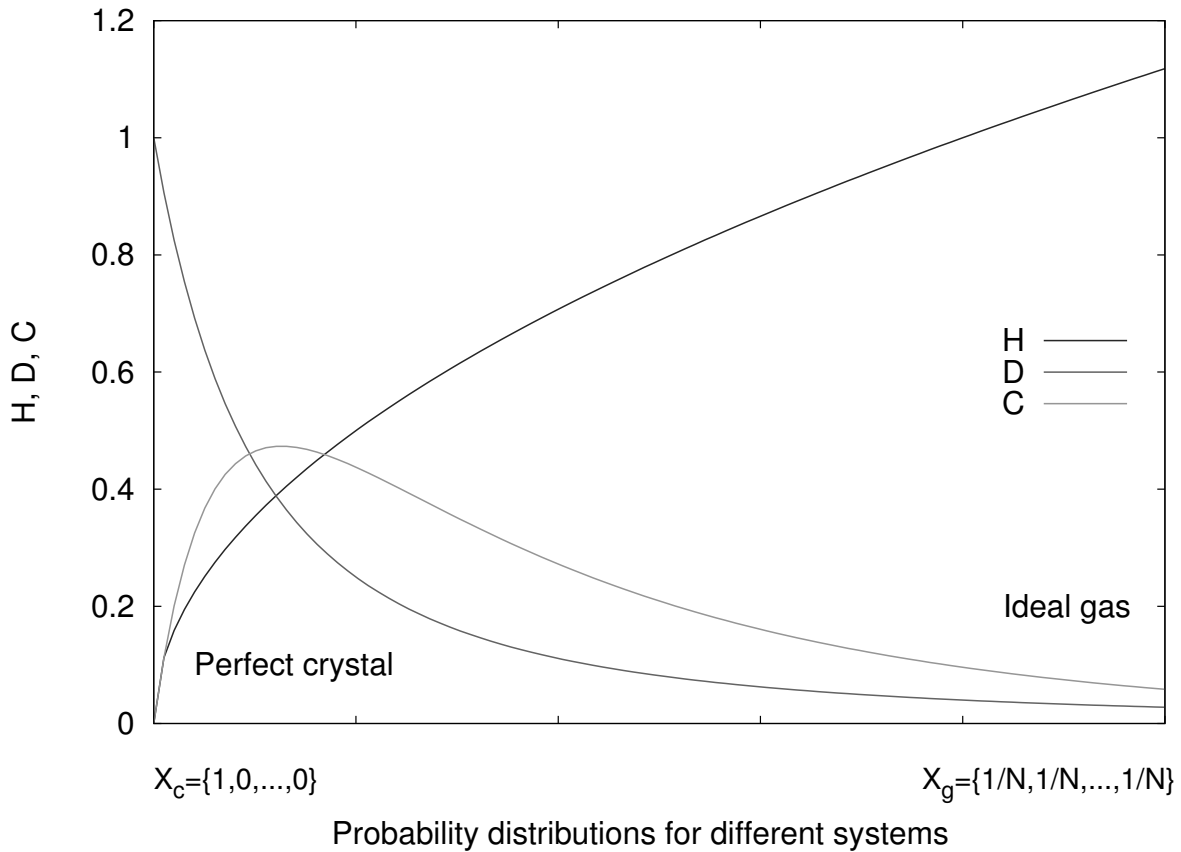


Figura 8.1: Definição intuitiva de complexidade.

o comportamento assintótico para os dois sistemas ideais extremos, o gás ideal e o cristal perfeito. Na definição adotada,

$$C = H \times D \quad (8.6)$$

onde  $H = \exp(S)$ , com  $S$  sendo a entropia de informação (ou informação contida no sistema) e  $D$  é o desequilíbrio (identificado como a distância do sistema ao estado de distribuição equiprovável de estados). Em sua definição original, as expressões para  $S$  e  $D$  são as seguintes:

$$S = - \int \rho(r) \ln[\rho(r)] dr \quad (8.7)$$

$$D = \int \rho^2(r) dr \quad (8.8)$$

A quantidade  $\rho(r)$  é a distribuição de probabilidade normalizada que descreve o estado do sistema.  $S$  descreve a incerteza associada a esta distribuição de probabilidade enquanto



$D$  é definido como a energia da informação (conforme definição de Onicescu (1965)), ou como a distância quadrática à equiprobabilidade. Estas definições tem sido utilizadas no estudo de sistemas atômicos (Panos et al. (2007); Panos e Chatzisavvas (2009); Panos et al. (2009)); no ramo da astrofísica, Sañudo e Pacheco (2009) aplicaram o conceito às anãs brancas e Chatzisavvas et al. (2009) às estrelas de nêutrons com uma equação de estado simples.

Nas situações astrofísicas relacionadas à estrutura dos objetos compactos, a escolha da quantidade  $\rho(r)$  deve ser feita com cautela: os autores citados utilizam a distribuição de densidade de massa como quantidade a ser utilizada nas integrais. Isso é justificado por notar que a distribuição de densidade de massa, que são obtidas a partir da resolução das equações de estrutura estelar, está relacionada à probabilidade de encontrar partículas em uma localização  $r$  dentro da estrela.

Uma questão importante de todo este desenvolvimento é: como estes conceitos estão relacionados à composição das estrelas de nêutrons? Da mesma maneira que uma dada equação de estado determina uma composição particular e uma sequência específica de estrelas no diagrama Massa-Raio, ela também nos leva à uma expressão particular de entropia de informação através do perfil de densidade de cada estrela nessa sequência. Logo, pode-se calcular o desequilíbrio e a complexidade e assim dizer algo a respeito de qual é o estado da matéria dentro do objeto compacto.

Avellar (2012); de Avellar e Horvath (2012) utilizam esta técnica no estudo de estrelas hadrônicas (equação de estado Sly4) e estrelas de quarks (modelo de sacola do MIT), onde encontram importantes resultados com relação à estrutura cristalina das estrelas e determina que o comportamento da informação em ambos os casos é praticamente o mesmo quando observado como função da massa estelar, porém varia significativamente quando a comparação é feita em função do raio da estrela. Além disso, estabeleceu-se que na comparação entre as duas equações de estado, para massas  $\leq (1.1 - 1.3)M_{\odot}$  os quarks tendem a ser mais cristalinos que os hádrons, e indicaria uma tendência da Natureza em preferir estrelas de nêutrons hadrônicas. Para massas  $\geq (1.1 - 1.3)M_{\odot}$  os quarks tendem a se aproximar de um estado de gás, e as estrelas de quarks seriam preferidas pela Natureza.

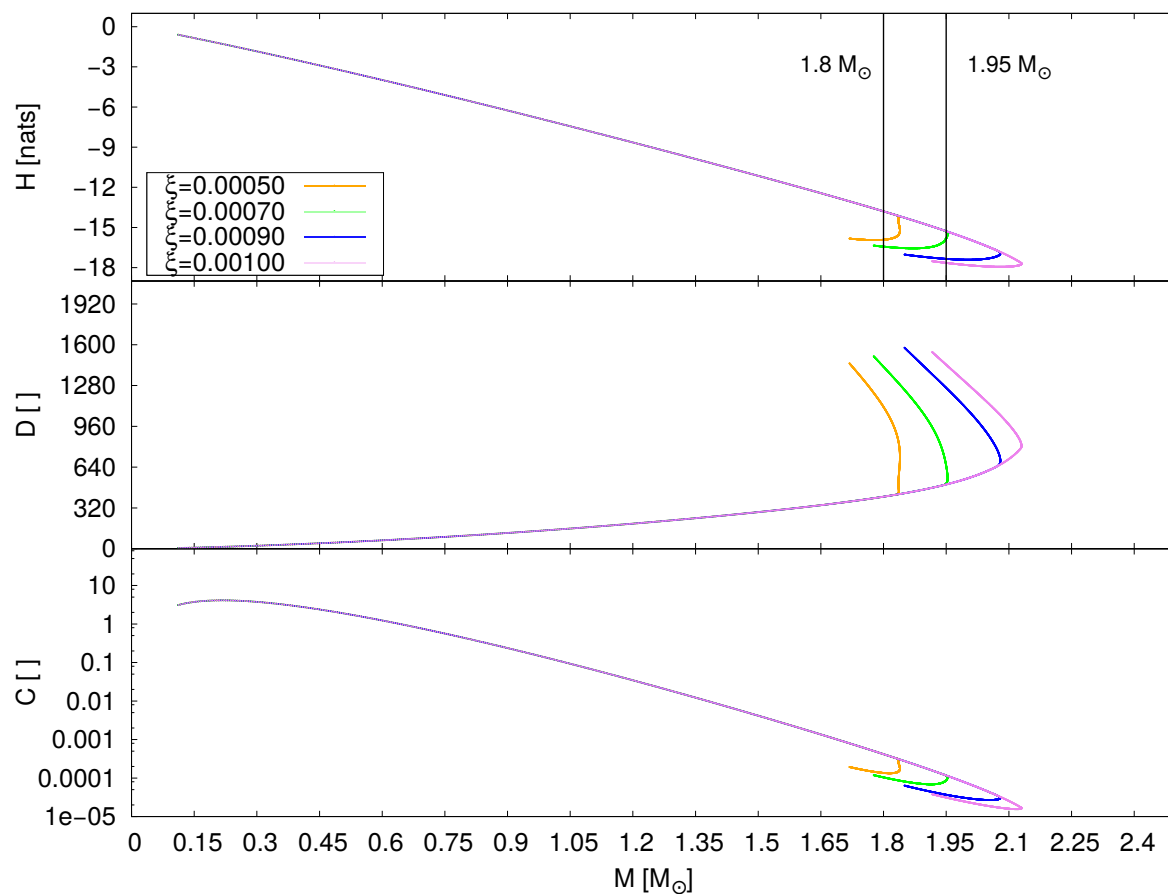
### 8.3 Entropia de Informação dos Modelos Híbridos

A seguir são comparados as medidas estatísticas das equações de estado híbridas obtidas para o modelo BPS+SWRDP+MFTQCD. De acordo com o que foi visto na Seção 8.2, a grandeza de interesse é a medida da complexidade, pois é nela onde está a informação dos objetos que a Natureza teria alguma preferência. Complexidade é a grandeza “composta” que codifica a distância do objeto real aos dois sistemas extremos opostos e ideais. Assim, um objeto real ideal é aquele que maximiza a entropia de informação enquanto o desequilíbrio mantém uma distância segura dos extremos.

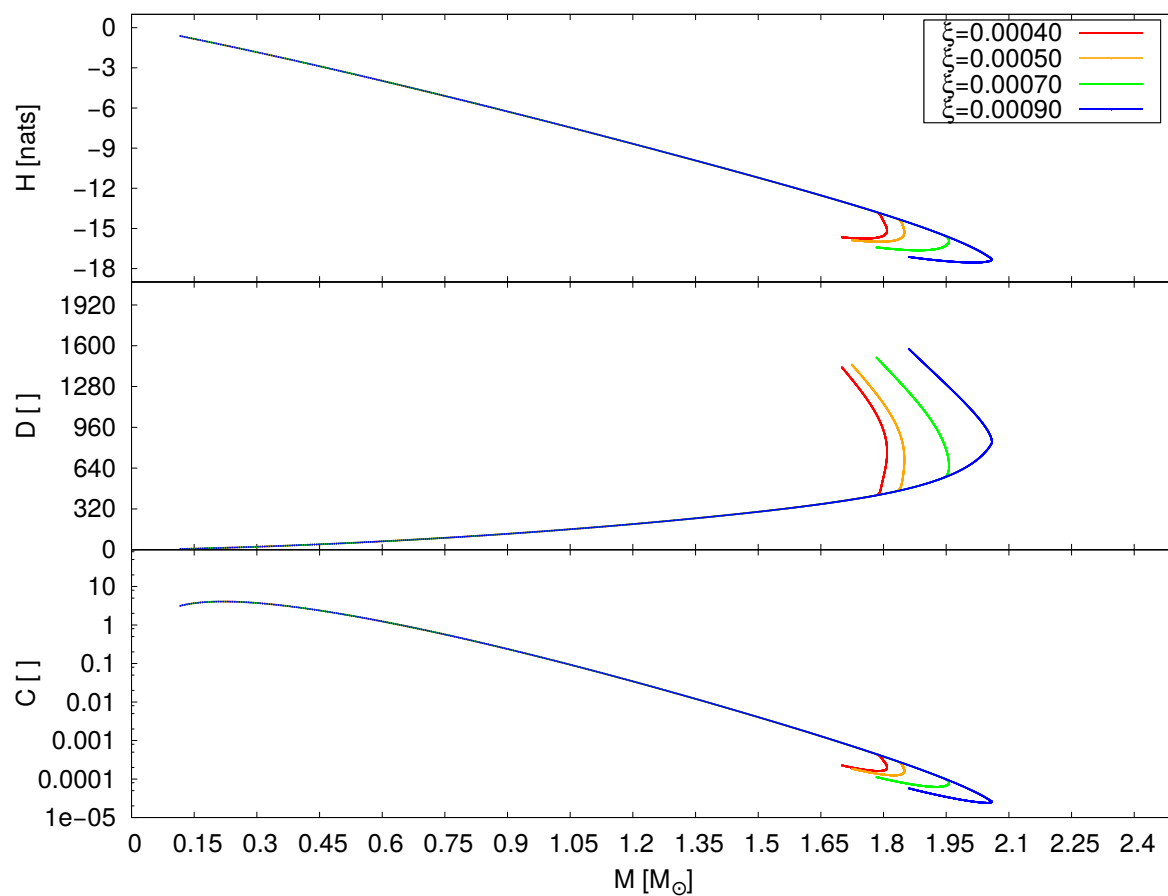
A análise aqui será feita entre as diferentes parametrizações de  $\xi$  para  $\zeta$  constante, e depois o estudo será estendido para a comparação destes resultados para parametrizações diferentes de  $\zeta$ .

Nas Figuras 8.2-8.4 vemos a comparação dos modelos estelares com  $\zeta$  fixo (cada figura representa um valor fixo de  $\zeta$ ). Pode-se perceber que em todos os casos a informação diminui drasticamente no ponto onde o núcleo de quarks passa a existir (definido no gráfico pela ‘quebra’ na curva). Pontos acima da massa máxima (H maior) estão no ramo estável, pontos abaixo no ramo instável (equivalente ao caso do diagrama massa-raio: estrelas à esquerda da massa máxima são instáveis, à direita, estáveis (Haensel et al., 2007).

Comparando para uma massa fixa no ramo estável, como por exemplo  $1.8 M_{\odot}$  na Figura 8.2(a), pode-se verificar que o parâmetro  $\xi$  não tem nenhuma influência, pois a equação de estado é a mesma em todos os casos (não existe fase híbrida), ou seja, todas as equações seriam igualmente favorecidas. Para uma massa de  $1.95 M_{\odot}$ , a conclusão é a mesma. Como só faz sentido compararmos equações de estado dentro do ramo estável percebe-se que o parâmetro  $\xi$  novamente não tem influência no valor da entropia. O mesmo raciocínio se aplica ao desequilíbrio e à complexidade. Neste caso podemos concluir que, pela ótica da complexidade informacional, não existe na Natureza preferência por diferentes  $\xi$  com  $\zeta$  fixo. A preferência seria decidida, pela Natureza, apenas pelo valor que a massa máxima pode assumir. Para massas iguais, dentro do ramo estável, as grandezas H, C e D são indistinguíveis umas das outras.

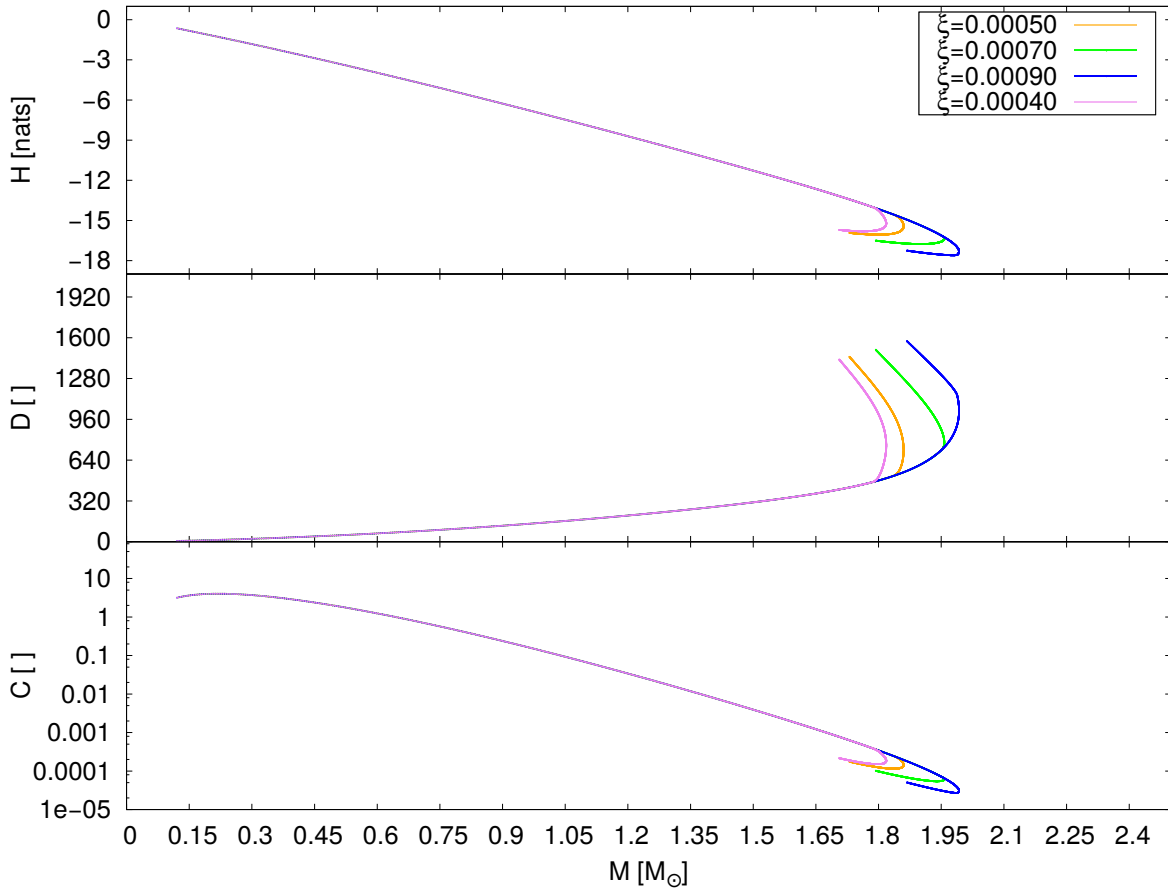


(a)

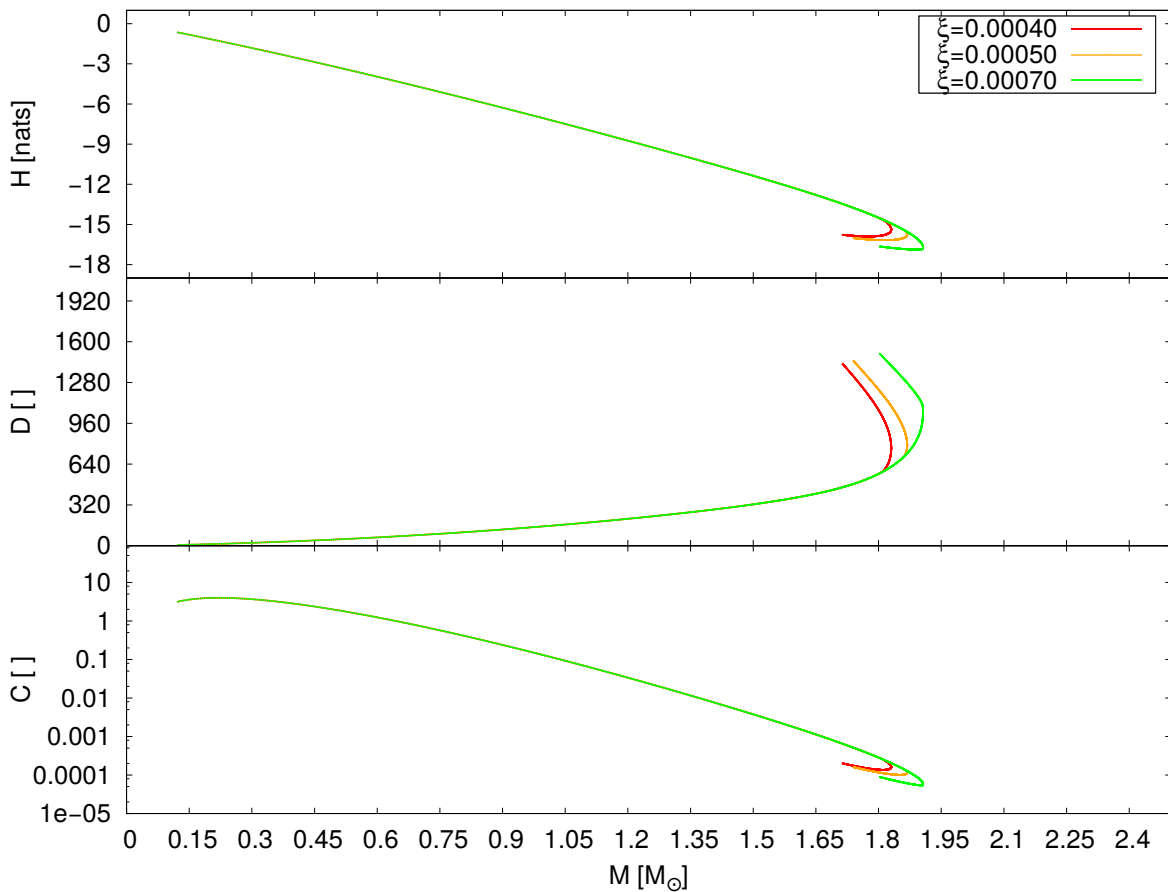


(b)

Figura 8.2: Diagrama de entropia, desequilíbrio e complexidade para estrelas híbridas no modelo BPS+SWRDP+MFTQCD, para parâmetros  $\zeta = 0.040$ (a) e  $\zeta = 0.049$ (b).



(a)



(b)

Figura 8.3: Diagrama de entropia, desequilíbrio e complexidade para estrelas híbridas no modelo BPS+SWRDP+MFTQCD, para parâmetros  $\zeta = 0.059$ (a) e  $\zeta = 0.071$ (b).

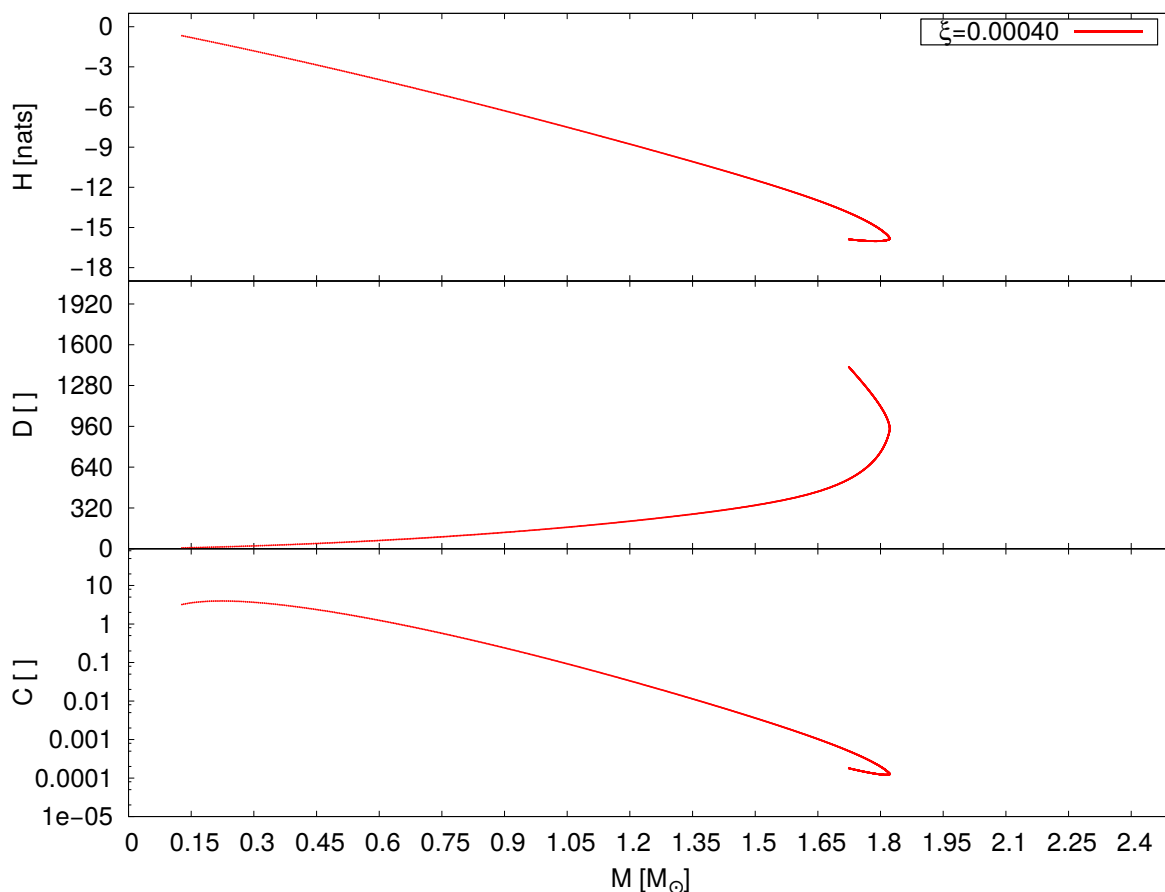


Figura 8.4: Diagrama de entropia, desequilíbrio e complexidade para estrelas híbridas no modelo BPS+SWRDP+MFTQCD, para parâmetro  $\zeta = 0.085$ .

Na Figura 8.5, pode-se ver o comportamento das grandezas  $H$ ,  $D$  e  $C$  para modelos híbridos onde mantém-se  $\xi$  fixo e varia-se a parametrização  $\zeta$  da equação de estado hadrônica. Podemos ver que a variação das grandezas é muito pequena nos limites das massas baixas, aumentando pouco na região onde aparece o núcleo de quarks. No caso das massas maiores, próximas à  $1.75 M_{\odot}$  por exemplo, se vê que modelos com parametrização  $\zeta$  menores são mais favorecidos. No caso do desequilíbrio, a análise é idêntica: parâmetros  $\zeta$  menores também são mais favorecidos. Desta maneira, sendo a complexidade uma grandeza composta, conclui-se unívocamente que no caso das estrelas híbridas utilizando este modelo, os valores menores da parametrização  $\zeta$  seria preferido na Natureza, ou seja, levando em consideração que o citado parâmetro leva à equações de estado mais duras quanto menor for o seu valor, a Natureza teria preferência por equações de estado mais duras. Juntando isto com o resultado obtido na comparação anterior, pode-se dizer que modelos com núcleos de quark onde o CQM é caracterizado pela baixa interação entre

os glúons com maior momento e os quarks, combinados com equações de estado hadrônicas mais duras são mais prováveis de ocorrerem na natureza pela ótica da teoria da informação.

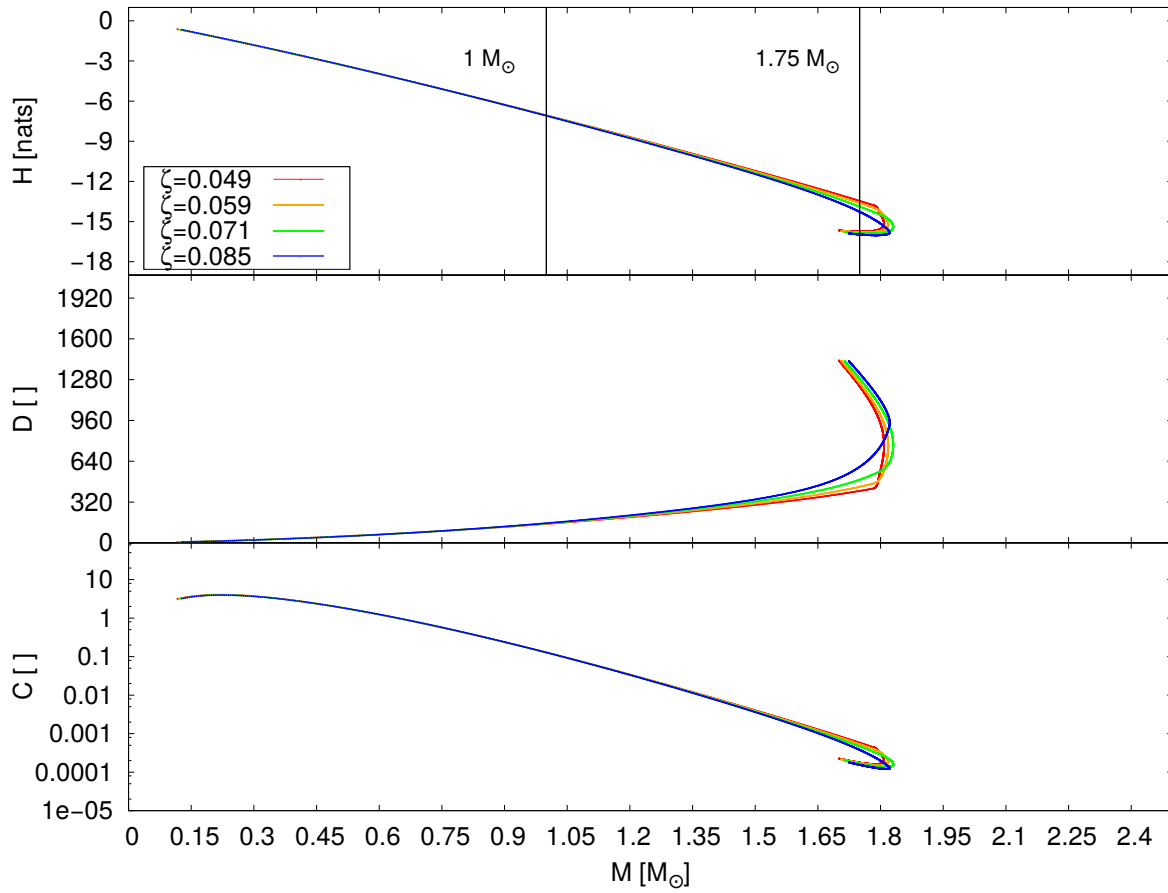


Figura 8.5: Diagrama de entropia, desequilíbrio e complexidade para estrelas híbridas no modelo BPS+SWRDP+MFTQCD, para parâmetro  $\xi = 0.00040$ .

## Estudos Complementares

Encontramos algo estranho nas  
margens do desconhecido.

---

Arthur Eddington

Neste capítulo são mostrados os resultados referentes ao estudo do modelo de *unparticles* aplicado às anãs brancas. O estudo inicia com a definição de polítrpos, segue com uma introdução ao modelo de *unparticles* e por fim são mostrados os resultados obtidos na caracterização de determinadas estrelas que não se enquadram nos diagramas massa-raio esperado, bem como a obtenção do intervalo de massa do propagador das *unparticles*.

### 9.1 Polítrpos

#### 9.1.1 Definição de Polítrpos e aplicações

Com a criação do diagrama Hertzsprung-Russel, a conexão entre uma classe de estrelas e sua temperatura efetiva foi estabelecida, que levou Eddington a estabelecer uma relação massa-luminosidade para estrelas da sequência principal, e posterior estudo dos mecanismos internos das estrelas. Em 1930, a estatística de Fermi-Dirac para elétrons degenerados foi publicada e rapidamente foi percebido que esta estatística era aplicável ao interior estelar de certas classes de estrelas, especialmente anãs brancas de alta massa. Baseado nisso, S. Chandrasekar conseguiu obter a massa crítica de uma anã branca, conhecida como massa de Chandrasekar. Neste ponto da história a representação politrópica estelar foi desenvolvida.

### 9.1.2 A física dos interiores estelares

O interior estelar é governado por um conjunto de quatro equações. São elas:

- **Equilíbrio hidrostático:** Equação diferencial que relaciona a variação da pressão no interior estelar com o raio, através das grandezas  $M_r$ , que é a massa total dentro do raio  $r$ , a constante gravitacional  $G$  e a densidade do objeto,  $\rho(r)$ .

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r \rho}{r^2} \quad (9.1)$$

- **Conservação da Massa:** Determina como a massa interior deve mudar com a distância ao centro.

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (9.2)$$

- **Produção de energia :** Relaciona a conservação de energia com o raio e o coeficiente de produção de energia  $\epsilon$ , indicando que a energia produzida no centro deve ser transportada até a superfície e irradiada pela estrela.

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon \quad (9.3)$$

- **Gradiente de temperatura :** Relação de onde se obtém a variação da temperatura como função do raio, ou o gradiente de temperatura. A equação depende de como a energia é transportada: condução, convecção ou radiação, e das constantes  $a$  (constante de radiação),  $c$  (velocidade da luz) e do coeficiente de absorção de massa  $\kappa$ .

$$\frac{dT}{dr} = \left( -\frac{3}{4ac} \right) \left( \frac{\kappa \rho}{T^3} \right) \left( \frac{L_r}{4\pi r^2} \right) \quad (9.4)$$

As Eqs. (9.1) e (9.2) dependem de três variáveis: pressão, massa e densidade. Uma maneira possível de relacionar duas destas grandezas é a adoção de uma equação de estado politrópica. Esta equação é da forma

$$P = K \rho^{1+\frac{1}{n}} \quad (9.5)$$



onde  $K$  e  $n$  são constantes. Segundo Maciel (1999), em algumas aplicações,  $K$ , também conhecido como parâmetro de entropia ou constante adiabática, é fixado pelas condições do gás, como no caso degenerado, e em outros casos  $K$  é um parâmetro livre.

Polítropos, de uma maneira geral, são definidos como sendo soluções da equação de Lane-Emden (seção 9.1.3), que é uma equação deduzida a partir das equações de equilíbrio hidrostático, conservação da massa e a equação de estado politrópica, na situação em que a pressão  $P$  depende da densidade na forma de uma lei de potência do tipo  $P = K\rho^{\frac{n+1}{n}}$ <sup>1</sup>, onde a constante  $n$  é chamada de índice politrópico, que varia de acordo com a situação sendo modelada. Esta equação de estado não assume nenhum tipo de transferência de calor ou condição de equilíbrio térmico, permitindo a utilização de apenas as equações de equilíbrio hidrostático e conservação de massa, evitando qualquer tipo de inconsistência com as equações restantes (Hansen et al., 2004). Dentre as situações que podem ser modeladas através de polítropos, elas variam desde cosmologia e energia escura Karami et al. (2009); Mukhopadhyay e Ray (2005), astrofísica extragaláctica Saxton e Ferreras (2009); Capello et al. (2010), até a física dos interiores estelares, como análise de núcleos isotérmicos, interiores estelares convectivos e configurações completamente degeneradas, que é o objeto deste estudo. Alguns exemplos nessa área específica são os interiores das estrelas de nêutrons, que podem ser aproximados por polítropos de índice  $n$  entre 1/2 e 1 e núcleos degenerados de estrelas (gigantes vermelhas), anãs brancas e planetas gigantes gasosos, que podem ser aproximados pelo modelo com  $n = 3/2$ .

### 9.1.3 Breve dedução da equação de Lane-Emden

As equações da seção 9.1.2 são o ponto de partida para a dedução de equação de Lane-Emden. A demonstração completa se encontra em Chandrasekhar (1957). Primeiramente, faz-se a seguinte transformação de variáveis da densidade e da pressão

$$\rho = \lambda\theta^n \tag{9.6}$$

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}} = K\lambda^{1+\frac{1}{n}}\theta^{n+1} \tag{9.7}$$

onde  $\lambda$  é uma constante arbitrária. Em seguida, utilizando (9.5), transforma-se as Eqs.

---

<sup>1</sup> Esta relação é assumida a priori.

(9.1) e (9.2) em

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho \quad (9.8)$$

Agora, aplicam-se (9.7) e (9.6) em (9.8) e obtém-se

$$\left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \lambda^{(1/n)-1} \right] \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = -\theta^n \quad (9.9)$$

É conveniente introduzir a variável  $a$ , definida da seguinte maneira

$$a = \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \lambda^{(1/n)-1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9.10)$$

De modo que assim podemos definir uma variável adimensional  $\xi$  em função de  $a$

$$\xi = \frac{r}{a} \quad (9.11)$$

definindo  $\xi$  como o raio adimensional da estrela. Com estas definições, chega-se na equação de Lane-Emden

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n \quad (9.12)$$

Como  $P \propto \rho^{1+\frac{1}{n}}$  e  $P \propto \rho T$ , temos que  $\rho \propto T^n$ . Comparando com (9.6), vemos que a função  $\theta(\xi)$  é uma função da temperatura da estrela em função do raio (Maciel, 1999). A Eq. (9.12) é chamada de “Equação de Lane-Emden de índice  $n$ ”. Ela determina o comportamento da densidade onde a Eq. (9.6) é válida. Neste caso, as condições de contorno determinam que a constante  $\lambda$  seja a densidade na origem  $\rho_c$ , pois ao considerarmos a relação (9.6), vemos que  $\rho(0) = \rho_c$ . Além disso, a variação de  $\theta(r)$  em  $r$  para  $r = 0$  também deve se anular. Assim, as condições de contorno ficam determinadas pelas relações

$$\theta(0) = 1$$

$$\left[ \frac{d\theta}{dr} \right]_{r=0} = 0$$

Ainda, a Eq. 9.6 passa a ter a seguinte forma

$$\rho = \rho_c \theta^n \quad (9.13)$$

### 9.1.4 Soluções da Equação de Lane-Emden

A equação de Lane-Emden não possui solução analítica para todos os índices  $n$ , ficando limitada aos índices  $n = 0$ ,  $n = 1$  e  $n = 5$ , como exposto detalhadamente por Chandrasekhar (1957).

Um tipo de solução de particular interesse é do polítropo de índice  $n = 3$ , correspondente ao modelo padrão de Eddington de estrutura estelar. Sua solução numérica pode ser vista na Fig. 9.1, e representa uma estrela na sequência principal, como o Sol.

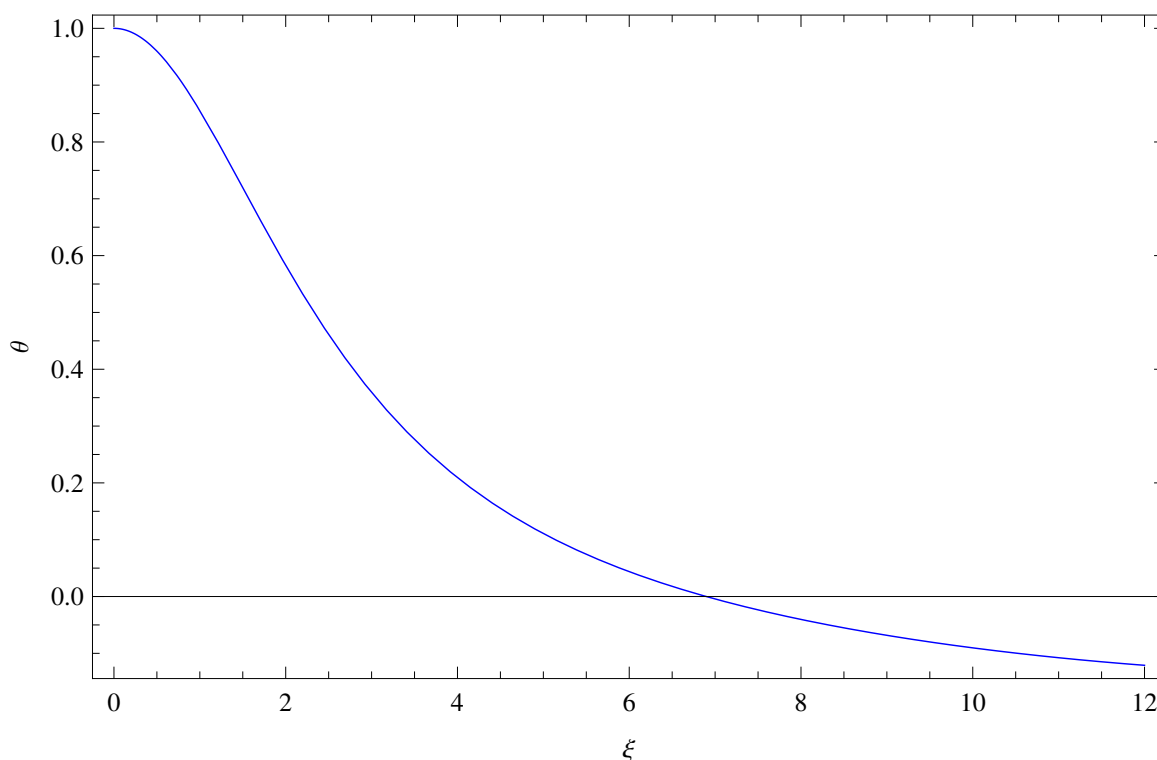


Figura 9.1: Solução numérica da equação de Lane-Emden para  $n=3$ .

### 9.1.5 Relação Massa - Raio

Resolvendo a Eq. (9.12) e analisando seu comportamento, pode-se obter o raio adimensional do objeto, dado pela primeira raiz da solução, como visto na Fig.9.1 (Camenzind, 2007; Shapiro e Teukolsky, 2008). Este raio, denominado  $\xi_*$ , aplicado na Eq. (9.11), dá a relação para o raio físico da estrela ( $R$ ) como função de sua densidade central e composição, dado na Eq.(9.14)

$$R = a\xi_* = \xi_* \sqrt{\frac{(n+1)K}{4\pi G} \rho_c^{\frac{1-n}{2n}}}. \quad (9.14)$$

A massa do corpo é obtida através da relação (9.2), que é função da densidade da estrela. Resolvendo a Eq. (9.2) para o raio da estrela, e manipulando algebricamente com a equação de Lane Emden, obtém-se a Eq. (9.15)

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^R 4\pi r^2 \rho = 4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_*} \xi^2 \theta^n d\xi \\
&= -4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_*} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) d\xi \\
&= -4\pi a^3 \rho_c \xi_*^2 |\theta'(\xi_*)| \\
&= 4\pi \left( \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right)^{3/2} \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} \xi_*^2 |\theta'(\xi_*)|, \tag{9.15}
\end{aligned}$$

que, por sua vez, ao resolver a Eq. (9.14) em  $\rho_c$ , chega-se na relação massa-raio obtida por Chandrasekhar Chandrasekhar (1957), dada pela Eq. (9.16).

$$M(R) = 4\pi \left( \frac{R}{\xi_*} \right)^{\frac{3-n}{1-n}} \left( \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right)^{\frac{n}{n-1}} \xi_*^2 |\theta'(\xi_*)|. \tag{9.16}$$

### 9.1.6 O parâmetro $K$

O parâmetro  $K$  se faz presente em várias equações ao longo do texto, como na equação de estado politrópica (Eq. (9.7)), o raio adimensional na equação de Lane-Emden (Eq. (9.10)) e as relações Massa-Raio (Eqs. (9.16) e (9.28)). É importante definir como este parâmetro é deduzido e calculado, para que se tenha um entendimento completo de sua importância no contexto das anãs brancas.

Neste trabalho, considerando as anãs brancas não relativísticas, sua estrutura é a de um gás completamente degenerado (que justamente no modelo politrópico é representado pelo índice  $n = 3/2$ ), chega-se na Eq. (9.17)

$$K = \frac{3^{2/3} \pi^{4/3}}{5} \frac{\hbar^3}{m_e m_\mu^{5/3} \mu_e^{5/3}} = 1.0036 \times 10^{13} Y_e^{5/3} \left[ \frac{\text{dina}}{\text{cm}^2} \right], \tag{9.17}$$

onde  $m_e$  é a massa do elétron,  $\mu_e$  é o peso médio molecular por elétron,  $m_\mu$  a unidade de massa atômica e  $Y_e$  é o número médio de elétrons por núcleon (Camenzind, 2007). Para o caso das anãs brancas,  $Y_e = Z/A = 0.5$ <sup>2</sup> é uma boa aproximação, para estrelas compostas de carbono ou oxigênio, mas ainda assim esta abordagem exige que seja conhecida a

<sup>2</sup> Z: número atômico, A: peso atômico

composição da estrela. Uma outra abordagem é a dada em Oliveira e Saraiva (2000) em que, usando a expressão para  $K$ , dada pela Eq. (9.18)

$$K = \left[ \frac{4\pi}{\xi^{n+1}(-\theta^{n-1})} \right]_{\xi_*}^{1/n} \frac{G}{n+1} M^{1-1/n} R^{-1+3/n}, \quad (9.18)$$

chega-se, para o caso em que o índice politrópico  $n = 3/2$ , com os valores conhecidos de  $\xi_* = 3.6538$  e  $\theta'(\xi_*) = -0.20330$  (Chandrasekhar, 1957), na relação

$$K = 2.477 \times 10^{14} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{R}{R_\odot} \right) \left[ \frac{dina}{cm^2} \right], \quad (9.19)$$

que não é adequada neste caso, em que se cairia em uma relação cíclica.

Para o modelo perturbado, pode-se chegar na relação

$$K = \left[ \frac{4\pi G}{5(4\pi)^{1/3}} \right] \left[ \frac{RM^{1/3}}{(\xi_*^5(4\pi|\theta'(\xi_*)|)^{1/3})} \right] \quad (9.20)$$

A seguir é feita uma introdução ao modelo das *unparticles*, responsável por alterar o potencial newtoniano e conseqüentemente a equação de equilíbrio hidrostático (Eq. (9.1)).

## 9.2 *Unparticles*

### 9.2.1 *Motivação*

Matéria e energia escuras compõem a vasta maioria de matéria no universo observável. Sua influência se faz sentir na rotação das galáxias, aglomerados de galáxias, bem como ela que irá determinar o destino do universo. Uma das teorias candidatas a explicar esta componente escondida é um tipo de material que tem massa, mas não se comporta como partícula, que neste trabalho será chamada de ‘unparticle’. A matéria escura é teorizada para ter várias formas, incluindo estrelas de nêutrons, partículas massivas fracamente interagentes (WIMPS), neutrinos e buracos negros. É difícil de compreender, entretanto, de onde a maioria da massa vem se não é possível observá-la. Neste sentido, a teoria das ‘unparticles’ fornece um caminho para a detecção desta massa faltante, no sentido que ela prevê um potencial gravitacional perturbado. Este potencial tem inúmeras ramificações na cosmologia e astrofísica, conforme será visto nas próximas seções.

### 9.2.2 A teoria

A energias suficientemente altas, todas as partículas podem ser tratadas com massa zero, porque a energia  $E$  está associada ao momento  $p$ , em unidades naturais, da seguinte forma:

$$E^2 = p^2 + m^2$$

onde  $m$  é a massa da partícula. Se  $E$  for muito maior que  $m$ , dado que  $m$  é uma constante que não depende da velocidade, podemos tomar  $E \approx p$ .

Teorias de partículas sem massa possuem uma simetria conhecida como simetria de escala. Uma transformação de escala faz todas as coordenadas de espaço e do tempo  $x$  serem multiplicadas por um fator  $\lambda$  (número real arbitrário)

$$x \rightarrow \lambda x \tag{9.21}$$

Essas teorias automaticamente fornecem uma realização de uma simetria ainda maior, chamada simetria conforme, que contém a Relatividade Especial como uma parte - as transformações de Lorentz são um subconjunto, no sentido matemático do termo, das transformações conformes citadas.

A simetria de escala começou a ganhar importância na física de partículas, e uma das descobertas mais importantes foi que a forma da simetria válida para teorias clássicas é inválida na mecânica quântica, porém pode ser recuperada.

Isso acontece supondo que se escreve uma teoria mais geral que a Relatividade Especial na qual a transformação (9.21) é uma simetria do espaço-tempo. Então, os campos físicos - e.g. campo elétrico e magnético - devem ter uma transformação como (9.21), por exemplo

$$\phi(x) \rightarrow \lambda^d \phi(\lambda x) \tag{9.22}$$

que mantém as equações da teoria invariante para um certo valor de  $d$ . Ao fazer a substituição da (9.22), as equações dos campos (por exemplo as equações de Maxwell) tomam a mesma forma. Assim, o valor de  $d$  em (9.22) que mantém a teoria clássica invariante não mantém a teoria quântica invariante. A simetria é recuperada no sentido de que se deve substituir  $d$  por  $\gamma$  dado por

$$\gamma \approx d + \frac{g^2}{16\pi} \quad (9.23)$$

onde  $g$  é a carga elétrica (o análogo disso nessa teoria conforme), para que a teoria quântica permaneça invariante. Nota-se que a quantidade  $d$  na teoria clássica corresponde a potência de unidades de (*energia*/ $\hbar c$ ) de  $\phi$ : se a unidade de  $\phi$  for  $(\text{GeV}/\hbar c)^2$ , então  $d = 2$  (a carga elétrica tem dimensão zero em unidades de  $\hbar c$ ). O fenômeno descrito pela (9.23), que é puramente quântico, é uma espécie de "transmutação" da dimensão física, chamada de dimensão anômala.

Em seu artigo de 2007, Georgi (2007) deu início à chamada teoria das *unparticles*. Partindo de que se a teoria quântica é invariante pela transformação da (9.21), então a simetria correspondente para a energia é

$$E \rightarrow E/\lambda \quad (9.24)$$

logo, se há uma partícula de massa  $m$  na teoria, visto que  $E = mc^2$  no referencial de repouso dessa partícula, também tem que existir a partícula de massa  $m/\lambda$ . Porém, como  $\lambda$  é qualquer número real que se queira, isso significa que há qualquer massa na teoria, ou todos os valores possíveis de massa, ou se preferir: não há partículas, e sim um espectro contínuo de todas as possíveis energias, mesmo no referencial de repouso, agora não mais limitadas pela igualdade  $E = mc^2$ , o que motivou Georgi a cunhar o termo "unparticle" para descrever a física dessas teorias. Ele propôs estudar a possibilidade do universo ter um setor de *unparticles* escondido: os campos conformes não foram vistos experimentalmente porque sua interação com as partículas ordinárias é muito fraca. A primeira consequência dessa idéia foi uma observação sobre o espectro de energia que pode ser visto em laboratório dessas teorias: enquanto para teoria de partículas esse espectro dependerá de  $1/E^n$  onde  $n$  é o número de partículas em uma certa reação, para a *unparticle* o espectro é  $1/E^\gamma$  onde  $\gamma$  é a dimensão anômala. Como a dimensão anômala não é um número inteiro, a física de *unparticles* é parecida com a de partículas com um número fracionário de partículas.

A física das 'unparticles' também possui interferências (no sentido da mecânica quântica) com partículas elementares de forma distinta daquela entre partículas. Isso pode ser usado como uma assinatura característica da existência da simetria conforme. Uma das implicações deste modelo seria a existência de um potencial gravitacional com um termo

extra. Esta correção pode ter ramificações importantes nas mais variadas situações, como órbitas estelares e galácticas e estruturas estelares. Além disso, a própria equação de Lane-Emden passa a ter uma perturbação decorrente deste novo potencial (ver Apêndice B), bem como a estrutura das anãs brancas, que vêm sendo estudadas para conferir se estas perturbações são permitidas e detectáveis nas medidas (de laboratório e astronômicas).

### 9.2.3 Implicações no Potencial Newtoniano

Em Bertolami et al. (2009), os autores consideram que interações tipo-tensor de *unparticles* com o tensor de stress de estados do modelo padrão levam a uma correção do potencial gravitacional newtoniano, chamado *ungravity*. Este potencial (Bertolami et al., 2009; Goldberg e Nath, 2008) é dado por

$$V(r) = -\frac{GM}{2r} \left[ 1 + \left( \frac{R_G}{r} \right)^{2D_U-2} \right] \quad (9.25)$$

e será utilizado para obtenção de uma equação de equilíbrio hidrostático perturbada, que por sua vez irá gerar uma equação de Lane-Emden perturbada. No potencial perturbado,  $D_U$  é a dimensão anômala das *unparticles* e  $R_G$  é a escala de comprimento característica onde as interações da *ungravity* passam a ser significantes. Para maiores detalhes, ver Goldberg e Nath (2008).

### Equações de equilíbrio hidrodinâmico e equação de Lane-Emden

Baseado no potencial definido pela relação (9.25), deve-se chegar em uma nova equação de equilíbrio hidrostático. A partir desta relação, e da Eq. (9.2), chega-se à equação de Lane-Emden perturbada, dada por

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = \frac{-\theta^n}{2} \left[ 1 + (2d_U - 1) \left( \frac{\xi_G}{\xi} \right)^{2d_U-2} \right] - (2d_U - 1)(d_U - 1) \frac{1}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} \left( \frac{\xi_G}{\xi} \right)^{2d_U-2} \quad (9.26)$$

Por conveniência, foi introduzida uma variável  $\xi_G = R_G/\beta$ , com

$$\beta = \left[ \frac{(n+1)K}{2\pi G} \rho_c^{(1/n)-1} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (9.27)$$

Bertolami et al. (2009) obtém soluções numéricas para o caso  $n=3$ .



### Relação Massa - Raio para o modelo de *unparticles*

Utilizando o mesmo procedimento que foi utilizando na Seç. 9.1.5, obteve-se a relação massa-raio perturbada, dada pela relação (9.28). A única diferença entre as relações massa-raio perturbada e não perturbada é o fator que multiplica  $\pi$  nas duas equações, sendo que o que realmente caracteriza o comportamento da relação é a solução da Eq. (9.26) e sua derivada primeira em  $\xi$ , calculada em  $\xi_*$ .

$$M(R) = 4\pi \left( \frac{R}{\xi_*} \right)^{\frac{3-n}{1-n}} \left( \frac{(n+1)K}{2\pi G} \right)^{\frac{n}{n-1}} \xi_*^2 |\theta'(\xi_*)|. \quad (9.28)$$

### 9.3 Relação Massa - Raio para o modelo perturbado - Soluções numéricas

A partir das relação massa-raio obtida para o modelo perturbado (Eq. (9.28)) e das soluções obtidas no apêndice B, pode-se verificar se a relação é coerente com as massas e raios medidos em Provencal et al. (2002), para a estrela *Procyon B*, e Bergeron et al. (2001) para a estrela *Stein 2051B*. Os valores das grandezas medidas estão na Tab. 9.1. A escolha destas estrelas se baseou no fato de utilizar estrelas com raio e massa medidos independentemente, com a condição de ser uma anã branca fria ( $T_{eff} < 8000K$ ), situação em que a perturbação por efeito da temperatura não influencie a perturbação causada pelas *unparticles*.

Tabela 9.1 - Valores de massa e raio para as estrelas *Procyon B* e *Stein 2051B*.

Estrela	Massa [ $M/M_\odot$ ]	Raio [ $R/R_\odot$ ]	$T_{eff}$
<i>Procyon B</i>	0.602(15)	0.01234(32)	7687
<i>Stein 2051B</i>	0.66(4)	0.011(1)	7100

Com o parâmetro  $K = 1.27 \times 10^{12}$ , foram obtidos os valores da massa em relação ao raio, na condição em que o parâmetro  $\xi_G$  na equação de Lane-Emdem perturbada (Eq. (9.26)) foi fixado em 1, e o parâmetro  $D_U$  variou de 0.5 a 1.5. Os valores obtidos nessa condição são mostrados, para *Procyon B*, na Tab. 9.2, e para a estrela *Stein 2051B* na Tab. 9.3.

Tabela 9.2 - Massas obtidas para *Procyon B*, variando o parâmetro  $D_U$ .

$D_U$	$M(R) \times 10^{33} g$	$M(R)/M_\odot$	Diferença ( $M_\odot$ )
0.5	4.59	2.3057	1.704
0.55	3.19	1.6051	1.003
0.6	2.53	1.2728	0.671
0.63	2.26	1.1355	0.533
0.65	2.11	1.0617	0.460
0.7	1.83	0.9191	0.317
0.75	1.62	0.8151	0.213
0.8	1.69	0.8489	0.247
0.9	1.27	0.6371	0.035
1.0	1.15	0.5765	0.026
1.1	1.09	0.5459	0.056
1.2	1.08	0.5411	0.061
1.3	1.11	0.5602	0.042
1.4	1.20	0.6012	0.001
1.5	1.32	0.6627	0.061

Tabela 9.3 - Massas obtidas para *Stein 2051B*, variando o parâmetro  $D_U$ .

$D_U$	$M(R) \times 10^{33} g$	$M(R)/M_\odot$	Diferença ( $M_\odot$ )
0.5	6.47	3.2552	2.595
0.55	4.51	2.2661	1.606
0.6	3.57	1.7969	1.137
0.63	3.19	1.6030	0.943
0.65	2.98	1.4988	0.839
0.7	2.58	1.2976	0.638
0.75	2.29	1.1508	0.491
0.8	2.38	1.1985	0.539
0.9	1.79	0.8995	0.239
1.0	1.62	0.8138	0.154
1.1	1.53	0.7708	0.111
1.2	1.52	0.7639	0.104
1.3	1.57	0.7909	0.131
1.4	1.69	0.8488	0.189
1.5	1.86	0.9356	0.276

Analisando ambos os casos, pode-se verificar que, variando o parâmetro  $D_U$ , o pontos

de mínimo se encontra nas proximidades de  $D_U = 1$  e  $D_U = 1.4$  (caso degenerado) para *Procyon B*, e  $D_U \approx 1.5$  para *Stein 2051B* (Figs. 9.2, 9.3 e 9.4).

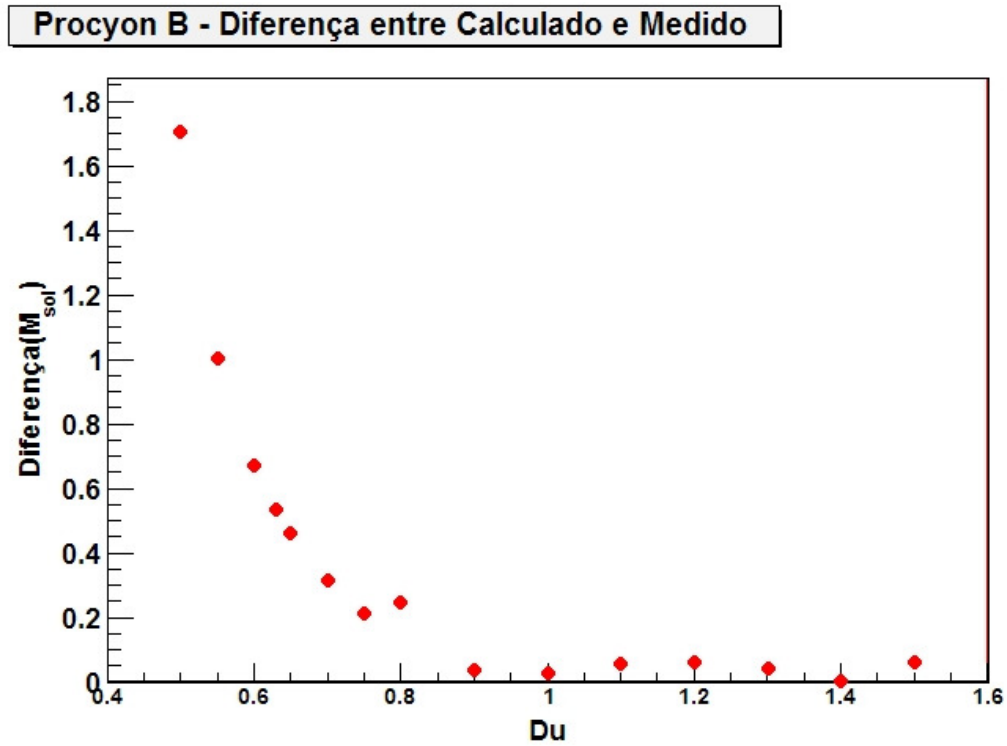


Figura 9.2: Diferença encontrada entre a massa medida e a massa calculada a partir do raio para a estrela *Procyon B*

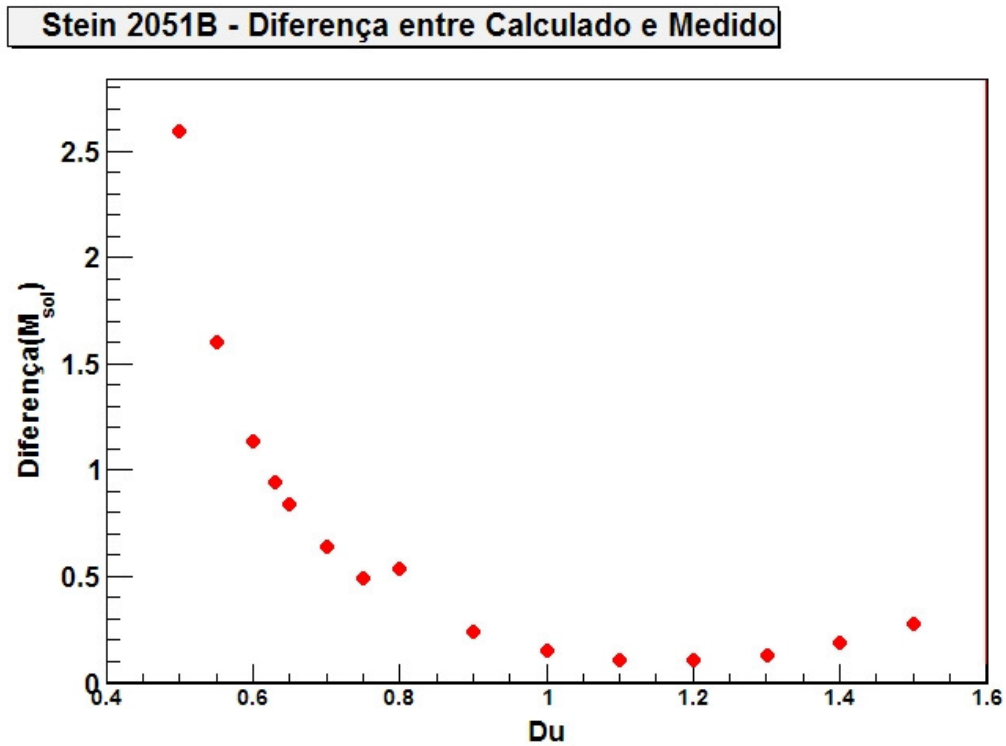


Figura 9.3: Diferença encontrada entre a massa medida e a massa calculada a partir do raio para a estrela *Stein 2051B*

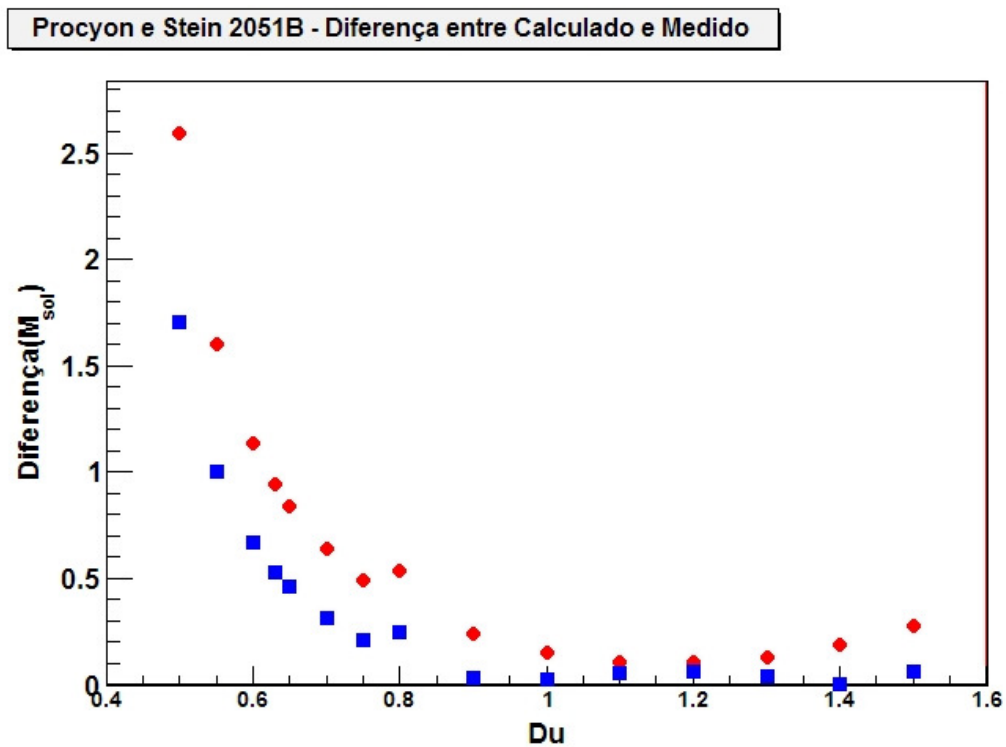


Figura 9.4: Sobreposição dos gráficos das Figs. 9.2 e 9.3

No estudo feito para comprovar a relação entre massa e raio de Provencal et al. (1998), duas estrelas em específico, *GD150* e *EG50* que, apesar de possuírem raios e massas incompatíveis com a sequência evolutiva do *Fe* (ver Fig. 9.5), figuram entre estrelas cuja composição é deste material (e não de *C* e *O*, composições mais coerentes com seus raios e massas).

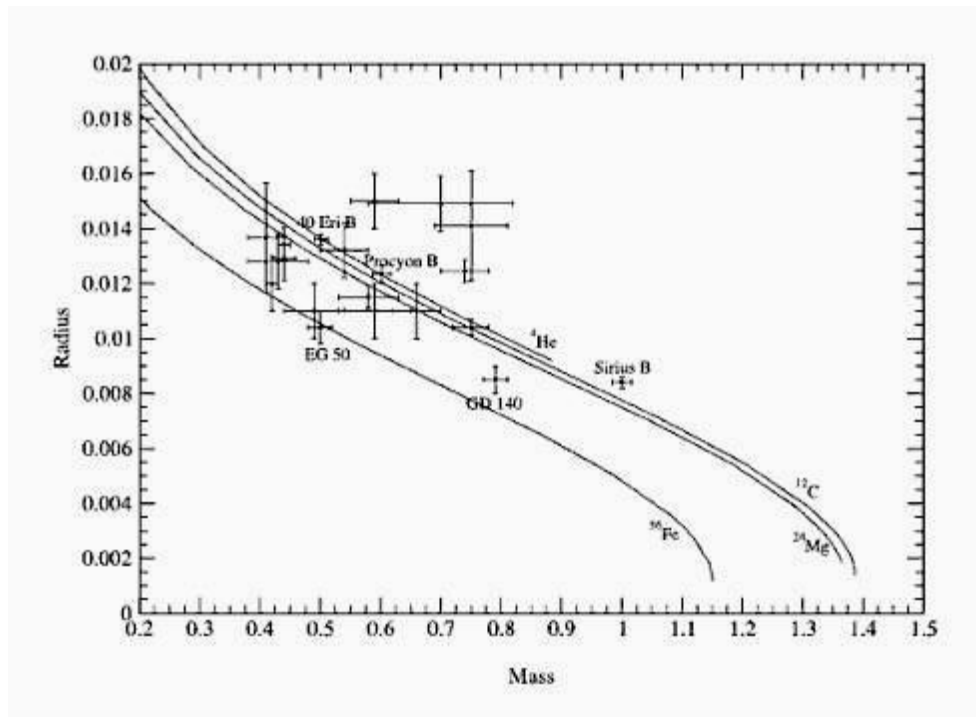


Figura 9.5: Relação massa-raio a partir dos dados do Hipparcos. As linhas sólidas referentes ao He, C, Mg e Fe denotam a relação massa-raio de temperatura 0 de Hamada e Salpeter (1961) (apud (Provencal et al., 1998)). As linhas tracejadas são relação anãs brancas com superfícies de 15000K e 8000L de Hidrogênio e núcleos de Carbono, de Wood (1995) (apud (Provencal et al., 1998)), e as barras de erro de  $1\sigma$  são referentes aos pontos observados (Provencal et al., 1998).

Fazendo uma análise similar à feita com *Procyon B* e *Stein 2051B*, chega-se ao resultado das Fig. 9.6.

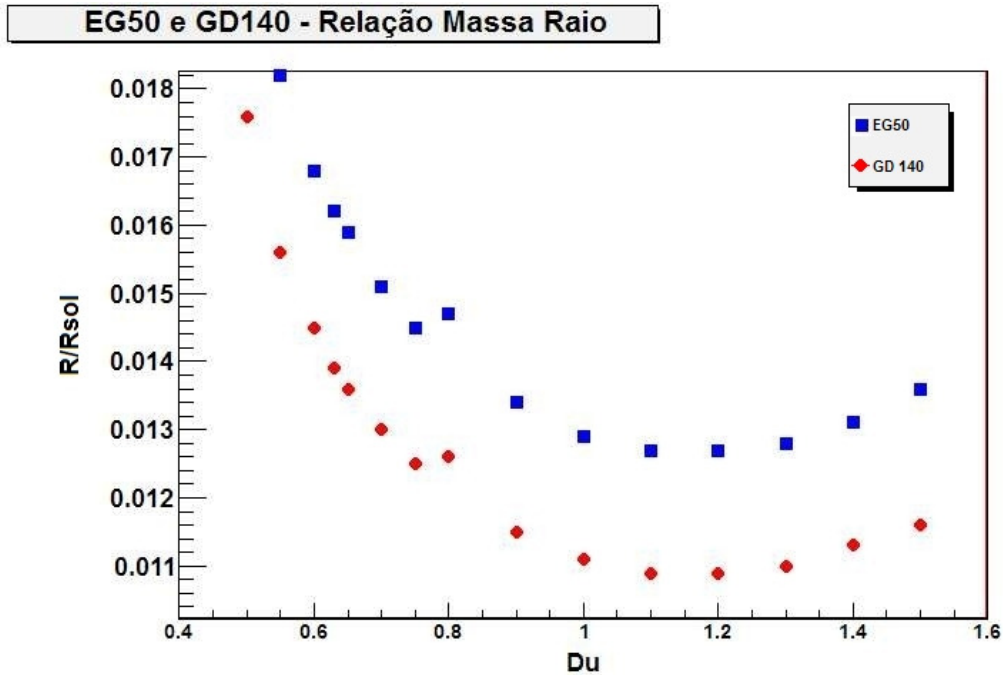


Figura 9.6: Raios, em  $R_{\odot}$  para as estrelas EG50 e GD140 utilizando a relação Massa-Raio perturbada.

Este resultado implica que ao obter um raio a partir da massa, utilizando a relação perturbada (neste caso a inversa,  $R(M)$ ), o menor raio obtido é aproximadamente o raio que a estrela deveria ter para estar nas proximidades da sequência estelar de composição de Carbono. Para outros valores de  $D_U$ , têm-se um aumento do raio, afastando ainda mais as estrelas da sequência evolutiva do Ferro.

#### 9.4 A massa do propagador das *unparticles*

É importante notar que a combinação  $\xi_G$  e  $d_U$  geram um grande intervalo de massas, indo de  $M \approx 1.291 M_{\odot}$  até  $M \approx 1.874 M_{\odot}$ . Isto significa que é possível restringir os parâmetros baseado na massa máxima das anãs brancas, pois tal massa deve se manter dentro dos valores obtidos a partir de dados observáveis. Seguindo este raciocínio, são assumidos três valores possíveis para a massa máxima:

- a massa máxima já observada dentro de um grande levantamento de anãs brancas realizado por Kepler et al. (2007), de  $M = 1.33 M_{\odot}$ . Porém, para que o valor de  $d_U$  fique restrito à vizinhança de 1, é necessário considerar massas a partir de  $M = 1.36 M_{\odot}$ , do contrário  $d_U$  teria seu valor muito distante de 1 e as correções gravitacionais do potencial perturbado na Eq.(9.25) seria muito grande.

- o limite “canônico”,  $M_{Ch} = 1.457 M_{\odot}$  para anãs brancas com composição de carbono; Apesar estar além do máximo observado, seu uso parece razoável.
- um valor ainda maior, acima do “limite de Chandrasekhar”,  $M = 1.60 M_{\odot}$ , arbitrariamente escolhido para representar um limite extremo permitido na natureza.

A partir dos dados acima, foram construídos curvas de nível onde a combinação de  $d_U$  e  $\xi_G$  foram utilizadas para gerar as massas máximas desejadas. O procedimento utilizado bem como o estudo completo pode ser consultado em de Souza e Horvath (2012) e no apêndice C.

Neste trabalho demonstrou-se que limites muito fortes aos parâmetros podem ser obtidos utilizando uma forma simples politrópica da teoria de Chandrasekhar, adicionando uma perturbação à equação de Lane-Emden e aplicando-a às sequências de anãs brancas. O ponto-chave elaborado aqui é que uma mudança nos parâmetros das *unparticles* afetaria a massa máxima permitida às anãs brancas, e esta característica foi explorada afim de limitar os valores de tais parâmetros e ainda encontrar um intervalo para a massa do propagador das *unparticles*  $M_*$ .

A exigência de que a massa máxima não seja pequena (pois entraria em conflito com algumas estrelas de grande massa (Kepler et al., 2007) ou grande demais (pois levaria à anãs brancas supermassivas não observadas) limita os valores de  $M_*$  para um intervalo de confiança de  $0.1M_{Pl} < M_* < 1.6M_{Pl}$  (onde  $M_{Pl}$  é a massa de Planck), dentro da análise com  $d_U \gtrsim 1$ . Para o caso  $d_U \lesssim 1$ , a relação massa-raio fornece apenas massas maiores do que o valor canônico. Considerando que até hoje não há nenhuma observação da anãs brancas com tais massas, esta análise pode ser significar que valores de  $d_U < 1$  não são permitidos.





## Conclusões

Não importa o quão bela é a sua teoria. Se ela não concordar com os experimentos, ela está errada.

---

Richard Feynman

O objetivo principal deste trabalho foi estudar a existência de matéria de quarks fria no Universo no único lugar onde ela poderia ser encontrado hoje: no interior das estrelas de nêutrons.

No capítulo 3 foi feita uma revisão dos modelos para cálculo da estrutura das estrelas em regime relativístico: o modelo canônico das equações de Tolman–Oppenheimer–Volkoff e o ‘novo paradigma’ do modelo de Einstein–Maxwell–Fermi. Conclui-se que o modelo de Einstein–Maxwell–Fermi possui algumas inconsistências, entre elas:

- O modelo não é adequado para o cálculo de estruturas com equações de estado híbrida, pois leva apenas graus de liberdade hadrônicos na sua formulação, deixando completamente de lado considerações com relação à matéria de quarks;
- O conceito principal aplicado na construção do modelo é um *scaling*, introduzindo correções em determinados limites, ou seja, intrinsecamente são objetos com neutralidade de carga global e não local, já que isso é uma característica própria do núcleo atômico;
- A neutralidade global realmente não é introduzida no modelo, mas aparece *ab initio*, considerando que é baseada no modelo atômico que é intrinsecamente neutro, mas não localmente dentro de sua fronteira.

Baseado nos itens acima apresentados, optou-se por utilizar a abordagem canônica, ou seja, utilizar as equações de Tolman–Oppenheimer–Volkoff para cálculo da estrutura estelar.

Seguindo adiante, foram apresentados modelos que descrevem a equação de estado hadrônica e de quarks, com o intuito de descrever o cenário presente no interior das estrelas de nêutron, ou seja, altas densidades e  $T \rightarrow 0$ .

Para descrever a fase hadrônica neste trabalho foi utilizado o modelo SWRDP, que considera todos os híperons e os efeitos de forças de muitos corpos simuladas pelo auto-acoplamento não linear e as contribuições méson-méson. Teorias anteriores que consideravam híperons nunca chegavam a produzir massas acima de  $1.5 M_{\odot}$ , porém esta equação de estado em questão, apesar de produzir massas na região das  $2 M_{\odot}$ , reduz o espaço de parâmetros de tal maneira que talvez indique que a CQM não está ou nunca estará presente nos interiores estelares.

A matéria de quarks foi descrita através de duas abordagens: a teoria de campo médio da QCD (MFTQCD) e a extensão infravermelha da QCD (QCDIRE). A abordagem MFTQCD separa os campos de glúons entre *soft gluons* para glúons de baixo momento e *hard gluons* para glúons de altos momentos, e é parametrizada pelo parâmetro  $\xi$  que representa a razão entre a constante de acoplamento da QCD e a massa dinâmica do glúon e a constante de sacola da teoria  $B_{QCD}$ . O parâmetro  $\xi$  é dominante na equação de estado e determina a dureza da mesma, sendo que a constante de sacola tem influência mínima nesta propriedade. A abordagem QCDIRE utiliza o conceito de violação de positividade no propagador do quark como critério de confinamento para os quarks e não possui nenhum parâmetro livre.

Para fazer a ligação entre a matéria hadrônica e a matéria de quarks fria, considerou-se uma transição de fase de primeira ordem utilizando a construção de Maxwell. O objetivo principal desse estudo foi determinar as propriedades globais de estrelas de nêutrons onde esse tipo de transição pode ocorrer, transformando a estrela em uma estrela híbrida, que possui um caroço de quarks em seu interior. Como o comportamento da densidade de energia é diferente ao longo das duas fases, existe uma descontinuidade na derivada primeira dessa quantidade nos pontos que delimitam a fase mista (onde aparece um  $\Delta\varepsilon$ ), fazendo com que a equação de estado apresente um comportamento abrupto nas regiões de interface, à pressão constante.

Através da integração dos modelos via TOV, foram obtidos os diagramas massa-raio do Capítulo 7. Destes diagramas, foram encontradas massas máximas que concordam com as observações dos pulsares PSR J1614–2230 ( $M = 1.97 \pm 0.04 M_{\odot}$ ) e PSR J0348+0432 ( $M = 2.01 \pm 0.04 M_{\odot}$ ) e nos permite concluir que, nas equações de estado híbridas utilizadas, as que apresentaram matéria hadrônica mais dura e caroço de quarks menos duro foram que as que alcançaram massas maiores. Matéria hadrônica dura é representada por valores de  $\zeta$  menores, e matéria de quarks *soft* é representada por valores de  $\xi$  menores. Convém destacar que, nos modelos híbridos apresentados, apenas valores de  $\xi$  menores que os utilizados por Franzon et al. (2012) permitiram a criação de equações de estado híbridas com o modelo SWRDP. Para valores maiores que os utilizados de  $\xi$ , não há transição de fase.

Com relação ao modelo QCDIRE, por não haver nenhuma parametrização, não foi possível criar um modelo híbrido. A equação de estado, por ser *soft* demais, não permite nenhuma transição de estado como o modelo hadrônico utilizado e não permite massas maiores que  $0.66 M_{\odot}$ . Isso pode se dever ao fato de não haver nenhuma interação introduzida *ad hoc* no modelo.

Também foi utilizada a teoria da informação para avaliar a preferência das diferentes equações de estado pela natureza. Concluiu-se que para modelos com  $\zeta$  fixo, o parâmetro  $\xi$  não tem nenhuma influência, pois a equação de estado é a mesma em todos os casos (não existe fase híbrida), ou seja, todas as equações seriam igualmente favorecidas pela ótica da complexidade informacional, não existe na Natureza preferência por diferentes  $\xi$  com  $\zeta$  fixo. Para o caso com  $\xi$  fixo e  $\zeta$  variável, verificou-se que a a variação das grandezas é muito pequena nos limites das massas baixas, aumentando pouco na região onde aparece o núcleo de quarks. No caso das massas maiores, próximas à  $1.75 M_{\odot}$ , modelos com parametrização  $\zeta$  menores são mais favorecidos. Assim, conclui-se que os valores menores da parametrização  $\zeta$  seria preferido na Natureza, ou seja, levando em consideração que o citado parâmetro leva à equações de estado mais duras quanto menor for o seu valor, a Natureza teria preferência por equações de estado mais duras. Logo, considerando as duas abordagens ( $\zeta$  fixo e  $\xi$  variável,  $\zeta$  variável e  $\xi$  fixo), pode-se dizer que modelos com núcleos de quark onde o CQM é caracterizado pela baixa interação entre os glúons com maior momento e os quarks, combinados com equações de estado hadrônicas mais duras são mais prováveis de ocorrerem na Natureza pela ótica da teoria da informação.

## 10.1 *Perspectivas Futuras*

O estudo das estrelas de nêutrons é multidisciplinar por natureza, o que permite que o trabalho apresentado nesta tese pode ser aprimorado em várias frentes. Enumero algumas delas:

- Repetir o estudo contemplando transições de fase contínuas;
- Incluir interações no modelo QCDIRE para verificar a possibilidade de endurecimento da equação de estado;
- Investigar a transição de fase com outras equações de estado de quarks, como os modelos Nambu-Jona-Lasinio (Nambu e Jona-Lasinio, 1961) e CFL (*color-flavor-locked*) (Alford et al., 2008).
- Investigar os efeitos da inclusão de campos magnéticos e rotação nos modelos estudados.

## Referências Bibliográficas

- Aguilar A. C., Binosi D., Papavassiliou J., Gluon and ghost propagators in the Landau gauge: Deriving lattice results from Schwinger-Dyson equations, *Phys. Rev. D*, 2008, vol. 78, p. 025010
- Alford M., Rajagopal K., Reddy S., Wilczek F., Minimal color-flavor-locked nuclear interface, *Phys. Rev. D*, 2001, vol. 64, p. 074017
- Alford M. G., Han S., Prakash M., Generic conditions for stable hybrid stars, *Phys. Rev. D*, 2013, vol. 88, p. 083013
- Alford M. G., Schmitt A., Rajagopal K., Schäfer T., Color superconductivity in dense quark matter, *Rev. Mod. Phys.*, 2008, vol. 80, p. 1455
- Alkofer R., Smekal L., The infrared behaviour of QCD Green's functions: Confinement, dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states, *Physics Reports*, 2001, vol. 353, p. 281
- Antoniadis J., Freire P. C. C., Wex N., Tauris T. M., Lynch R. S., van Kerkwijk M. H., Kramer M., Bassa C., Dhillon V. S., Driebe T., Hessels J. W. T., Kaspi V. M., Kondratiev V. I., Langer N., Marsh T. R., McLaughlin M. A., Pennucci T. T., Ransom S. M., Stairs I. H., van Leeuwen J., Verbiest J. P. W., Whelan D. G., A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary, *Science*, 2013, vol. 340
- Avellar M. G. B., Diferentes abordagens à Composição e ao Ambiente das Estrelas de Nêutrons, São Paulo: USP, 2012, Tese de Doutorado, 137 p.
- Baade W., Zwicky F., Supernovae and cosmic rays, *Phys. Rev.*, 1934, vol. 45, p. 138

- Baulieu L., Capri M., Gómez A., Lemes V., Sobreiro R., Sorella S., Renormalizability of a quark–gluon model with soft BRST breaking in the infrared region, *The European Physical Journal C*, 2010, vol. 66, p. 451
- Baym G., Chin S. A., Can a Neutron Star Be a Giant MIT Bag?, *Phys. Lett.*, 1976, vol. B62, p. 241
- Baym G., Pethick C., Sutherland P., The Ground State of Matter at High Densities: Equation of State and Stellar Models, *ApJ*, 1971, vol. 170, p. 299
- Bejger M., Haensel P., Zdunik J. L., Mixed-phase induced core-quakes and the changes in neutron-star parameters, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2005, vol. 359, p. 699
- Bergeron P., Leggett S. K., Ruiz M. T., Photometric and Spectroscopic Analysis of Cool White Dwarfs with Trigonometric Parallax Measurements, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 2001, vol. 133, p. 413
- Bertolami O., Páramos J., Santos P., Astrophysical constraints on unparticle-inspired models of gravity, *Phys. Rev. D*, 2009, vol. 80, p. 022001
- Bethe H. A., Bacher R. F., Nuclear Physics A. Stationary States of Nuclei, *Rev. Mod. Phys.*, 1936, vol. 8, p. 82
- Bhattacharyya A., Mishustin I. N., Greiner W., Deconfinement Phase Transition in Compact Stars : Maxwell vs. Gibbs Construction of the Mixed Phase, *J. Phys.*, 2010, vol. G37, p. 025201
- Bjorken J., Drell S., *Relativistic quantum mechanics. International series in pure and applied physics*, McGraw-Hill, 1964
- Blaizot J., Nuclear compressibilities, *Physics Reports*, 1980, vol. 64, p. 171
- Bombaci I., The maximum mass of a neutron star., *A&A*, 1996, vol. 305, p. 871
- BotRejectsInc, 2016 White Dwarf Stars

- Burigo L. N., Bodmann B. E. J., Jacobsen R. B., Vasconcellos C. A. Z., Fernandez F.,  
On the confined-deconfined phase transition in nuclear matter and neutron stars, *Int. J. Mod. Phys.*, 2010, vol. D19, p. 1563
- Burrows A., Lattimer J. M., The birth of neutron stars, *ApJ*, 1986, vol. 307, p. 178
- Camenzind M., Compact objects in astrophysics : white dwarfs, neutron stars, and black holes, 2007
- Capello P., Natarajan P., Coppi P., Hydrostatic equilibrium profiles for gas in elliptical galaxies, 2010
- Capri M. A. L., Guimaraes M. S., Justo I. F., Palhares L. F., Sorella S. P., Properties of the Faddeev-Popov operator in the Landau gauge, matter confinement, and soft BRST breaking, *Phys. Rev. D*, 2014, vol. 90, p. 085010
- Carrigan R., Trower W., *Particles and Forces: At the Heart of Matter : Readings from Scientific American Magazine*. Readings from Scientific American, W.H. Freeman, 1990
- Carroll B., Ostlie D., *An Introduction to Modern Astrophysics*. Addison-Wesley, 1996
- Carvalho S. M., Rotondo M., Rueda J. A., Ruffini R., Relativistic Feynman-Metropolis-Teller treatment at finite temperatures, *Phys. Rev. C*, 2014, vol. 89, p. 015801
- Catalán R. G., Garay J., López-Ruiz R., Features of the extension of a statistical measure of complexity to continuous systems, *Phys. Rev. E*, 2002, vol. 66, p. 011102
- CBM, 2016 Home page do experimento Compressed Baryonic Matter - CBM
- Celenza L. S., Shakin C. M., Description of the gluon condensate, *Phys. Rev. D*, 1986, vol. 34, p. 1591
- Chadwick J., Possible Existence of a Neutron, *Nature*, 1932, vol. 129
- Chandrasekhar S., The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs, *ApJ*, 1931, vol. 74, p. 81
- Chandrasekhar S., *An introduction to the study of stellar structure*. Astrophysical monographs, Dover Publications, 1957

- Chatzisavvas K. C., Psonis V. P., Panos C. P., Moustakidis C. C., Complexity and neutron star structure, *Physics Letters A*, 2009, vol. 373, p. 3901
- Chodos A., Jaffe R. L., Johnson K., Thorn C. B., Weisskopf V. F., New extended model of hadrons, *Phys. Rev. D*, 1974, vol. 9, p. 3471
- D. Dudal M. S. Guimaraes L. F. P., Sorella S. P., From QCD to a dynamical quark model: construction and some meson spectroscopy, 2013
- de Avellar M., Horvath J., Entropy, complexity and disequilibrium in compact stars, *Physics Letters A*, 2012, vol. 376, p. 1085
- de Avellar M. G. B., de Souza R. A., Horvath J. E., Trends of stellar entropy along stellar evolution, *Research in Astronomy and Astrophysics*, 2016, vol. 16, p. 001
- de Souza R., Horvath J. E., Reducing the parameter space for unparticle-inspired models using white dwarf masses, *Phys. Rev. D*, 2012, vol. 86, p. 027502
- Demorest P. B., Pennucci T., Ransom S. M., Roberts M. S. E., Hessels J. W. T., A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay, *Nature*, 2010, vol. 467, p. 1081
- Dexheimer V. A., Vasconcellos C. A. Z., Bodmann B. E. J., Density dependent nuclear matter compressibility, *Phys. Rev. C*, 2008, vol. 77, p. 065803
- Dover C., Gal A., Hyperon-nucleus potentials, *Prog.Part.Nucl.Phys.*, 1985, vol. 12
- Duerr H.-P., Relativistic Effects in Nuclear Forces, *Phys. Rev.*, 1956, vol. 103, p. 469
- Endo T., Region of a hadron-quark mixed phase in hybrid stars, *Phys. Rev. C*, 2011, vol. 83, p. 068801
- Espinoza C. M., Lyne A. G., Stappers B. W., Kramer M., A study of 315 glitches in the rotation of 102 pulsars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2011, vol. 414, p. 1679
- Farhi E., Jaffe R. L., Strange matter, *Phys. Rev. D*, 1984, vol. 30, p. 2379
- Ferreirinho J., Ruffini R., Stella L., On the relativistic Thomas-Fermi model, *Physics Letters B*, 1980, vol. 91, p. 314



- Feynman R. P., Metropolis N., Teller E., Equations of State of Elements Based on the Generalized Fermi-Thomas Theory, *Phys. Rev.*, 1949, vol. 75, p. 1561
- Fogaça D., Navarra F., Gluon condensates in a cold quark-gluon plasma, *Physics Letters B*, 2011, vol. 700, p. 236
- Franzon B., Fogaça D. A., Navarra F. S., Horvath J. E., Self-bound interacting QCD matter in compact stars, *Phys. Rev. D*, 2012, vol. 86, p. 065031
- Fukushima K., Chiral effective model with the Polyakov loop, *Physics Letters B*, 2004, vol. 591, p. 277
- Gell-Mann M., Lévy M., The axial vector current in beta decay, *Il Nuovo Cimento* (1955-1965), 1960, vol. 16, p. 705
- General I., Gomez D., Scoccola N., Chiral Phase Transition in a Covariant Nonlocal NJL Model. World Scientific, 2001, 391
- Georgi H., Unparticle Physics, *Phys. Rev. Lett.*, 2007, vol. 98
- Glendenning N., Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity. Astronomy and astrophysics library, Springer Verlag, 2000
- Glendenning N. K., Equation of state from nuclear and astrophysical evidence, *Phys. Rev. C*, 1988a, vol. 37, p. 2733
- Glendenning N. K., Vacuum polarization effects in the non-linear sigma-omega model, *Physics Letters B*, 1988b, vol. 208, p. 335
- Glendenning N. K., First-order phase transitions with more than one conserved charge: Consequences for neutron stars, *Phys. Rev. D*, 1992, vol. 46, p. 1274
- Glendenning N. K., Moszkowski S. A., Reconciliation of neutron-star masses and binding of the  $\Lambda$  in hypernuclei, *Phys. Rev. Lett.*, 1991, vol. 67, p. 2414
- Glendenning N. K., Pei S., Crystalline structure of the mixed confined-deconfined phase in neutron stars, *Phys. Rev. C*, 1995, vol. 52, p. 2250
- Gold T., Rotating Neutron Stars and the Nature of Pulsars, *Nature*, 1969, vol. 221, p. 25

- Goldberg H., Nath P., Scalar Modifications to Gravity from Unparticle Effects May Be Testable, *Phys. Rev. Lett.*, 2008, vol. 100, p. 031803
- Gomes R. O., Dexheimer V., Schramm S., Vasconcellos C. A. Z., Many-body Forces in the Equation of State of Hyperonic Matter, *The Astrophysical Journal*, 2015, vol. 808, p. 8
- Gomes R. O., Dexheimer V., Vasconcellos C. A. Z., Effects of strong magnetic fields on the population of hyperon stars, *Astronomische Nachrichten*, 2014a, vol. 335, p. 666
- Gomes R. O., Dexheimer V., Vasconcellos C. A. Z., The role of magnetic fields in hyperon stars, *AIP Conference Proceedings*, 2014b, vol. 1595, p. 242
- Greenberg J. S., Greiner W., Search for the sparking of the vacuum, *Physics Today*, 1982, vol. 35, p. 24
- Greiner W., Bromley D., Schramm S., Stein E., *Quantum Chromodynamics*. Springer Berlin Heidelberg, 2013
- Griffiths D., *Introduction to Elementary Particles*. Physics textbook, Wiley, 2008
- Guimarães M. S., Mintz B. W., Palhares L. F., Thermodynamics of an exactly solvable confining quark model, *Phys. Rev. D*, 2015, vol. 92, p. 085029
- Haensel P., Potekhin A., Yakovlev D., *Neutron Stars 1: Equation of State and Structure*. Astrophysics and Space Science Library, Springer New York, 2007
- Haensel P., Potekhin A. Y., Analytical representations of unified equations of state of neutron-star matter, *Astronomy & Astrophysics*, 2004, vol. 428, p. 191
- Halzen F., Martin A., *Quarks and leptons: an introductory course in modern particle physics*. Wiley, 1984
- Hamada T., Salpeter E., Models for Zero-Temperature Stars, *The Astrophysical Journal*, 1961, vol. 134, p. 683
- Hansen C. J., K. S. D., T. V., *Stellar interiors: physical principles, structure, and evolution* 2 edn. Springer-Verlag, 2004
- Harrison B. K., Thorne K. S., Wakano M., Wheeler J. A., *Gravitation Theory and Gravitational Collapse*, 1965

- Harrison B. K., Wakano M., Wheeler J. A., Matter-Energy at High Density - End Point of Thermonuclear Evolution, *La Structure et l'évolution de l'univers*, 1958, vol. 1, p. 124
- Hayashi C., Stellar evolution in early phases of gravitational contraction., *PASJ*, 1961, vol. 13
- Heiselberg H., Hjorth-Jensen M., Phases of dense matter in neutron stars, *Phys. Rept.*, 2000, vol. 328, p. 237
- Hewish A., Bell S. J., Pilkington J. D. H., Scott P. F., Collins R. A., Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source, *Nature*, 1968, vol. 217, p. 709
- Horvath J., Fundamentos da evolução estelar, Supernovas e Objetos Compactos 1 edn. Livraria Editora da Física, 2011
- Horvath J. E., Propagating combustion modes of the neutron-to-strange-matter conversion: the role of instabilities, *International Journal of Modern Physics D*, 2010, vol. 19, p. 523
- Hussein S., Salinas S., 100 anos de física quântica. Livraria da Física, 2002
- Johnson M. H., Teller E., Classical Field Theory of Nuclear Forces, *Phys. Rev.*, 1955, vol. 98, p. 783
- Kapusta J., Gale C., Finite-Temperature Field Theory: Principles and Applications. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2006
- Karami K., Ghaffari S., Febri J., Interacting polytropic gas model of phantom dark energy in non flat universe, 2009
- Karttunen H., Kröger P., Oja H., Poutanen M., Donner K., *Fundamental Astronomy*. Springer Berlin Heidelberg, 2013
- Kepler S. O., Kleinman S. J., Nitta A., Koester D., Castanheira B. G., Giovannini O., Costa A. F. M., Althaus L., White dwarf mass distribution in the SDSS, *MNRAS*, 2007, vol. 375, p. 1315
- Kippenhahn R., Weigert A., *Stellar structure and evolution*. Astronomy and astrophysics library, Springer, 1990

- Klein O., On the Thermodynamical Equilibrium of Fluids in Gravitational Fields, *Rev. Mod. Phys.*, 1949, vol. 21, p. 531
- Krivine H., Treiner J., Bohigas O., Derivation of a fluid-dynamical lagrangian and electric giant resonances, *Nuclear Physics A*, 1980, vol. 336, p. 155
- Landau L., On the theory of stars, *Phys. Z. Sowjetunion*, 1932, vol. 1
- Lattimer J. M., Prakash M., Ultimate Energy Density of Observable Cold Baryonic Matter, *Phys. Rev. Lett.*, 2005, vol. 94, p. 111101
- Li X., Shakin C. M., Description of gluon propagation in the presence of an  $A^2$  condensate, *Phys. Rev. D*, 2005, vol. 71, p. 074007
- Lieb E. H., Simon B., Thomas-Fermi Theory Revisited, *Phys. Rev. Lett.*, 1973, vol. 31, p. 681
- Lopez-Ruiz R., Mancini H., Calbet X., A statistical measure of complexity, *Physics Letters A*, 1995, vol. 209, p. 321
- Maciel W., *Astrofísica do Meio Interestelar Vol. 41*. EDUSP, 2002
- Maciel W. J., *Introdução à Estrutura e Evolução Estelar* 1 edn. Edusp, 1999
- Megías E., Arriola E. R., Salcedo L. L., Chiral Lagrangian at finite temperature from the Polyakov-chiral quark model, *Phys. Rev. D*, 2006, vol. 74, p. 114014
- Meisinger P. N., Ogilvie M. C., Chiral symmetry restoration and  $\{ZN\}$  symmetry, *Physics Letters B*, 1996, vol. 379, p. 163
- Mesquita B., *Condensação de Káons em Estrelas de nNêutrons*, Porto Alegre: UFRGS, 2010, Tese de Doutorado
- Miniutti G., Pons J. A., Berti E., Gualtieri L., Ferrari V., Non-radial oscillation modes as a probe of density discontinuities in neutron stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2003, vol. 338, p. 389
- Mukhopadhyay U., Ray S., *Dark energy with polytropic equation of state*, 2005

- 
- Muta T., Foundations of Quantum Chromodynamics: An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories. World Scientific lecture notes in physics, World Scientific, 2010
- Myers W., Swiatecki W., Nuclear properties according to the Thomas-Fermi model, Nuclear Physics A, 1996, vol. 601, p. 141
- Myers W. D., Swiatecki W. J., , Ann. Phys, 1969, vol. 55
- Nambu Y., Jona-Lasinio G., Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I, Phys. Rev., 1961, vol. 122, p. 345
- Nastasi M., Mayer J., Hirvonen J., Ion-Solid Interactions: Fundamentals and Applications. Cambridge Solid State Science Series, Cambridge University Press, 1996
- Negele J. W., Vautherin D., Neutron star matter at subnuclear densities, Nucl. Phys., 1973, vol. A207, p. 298
- Newton W. G., Neutron stars: A taste of pasta?, Nat Phys, 2013, vol. 9, p. 396
- Oliveira K., Saraiva M., Astronomia e astrofísica. Ed. Universidade/UFRGS, 2000
- Onicescu O., Energie informationnelle, C.Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 1965, vol. 263, p. 841
- Oppenheimer J. R., Volkoff G. M., On Massive Neutron Cores, Phys. Rev., 1939, vol. 55, p. 374
- Osterwalder K., Schrader R., Axioms for Euclidean Green's functions, Communications in Mathematical Physics, 1973, vol. 31, p. 83
- Pacini F., Rotating Neutron Stars, Pulsars and Supernova Remnants, Nature, 1968, vol. 219, p. 145
- Palhares L. F., Fraga E. S., Droplets in the cold and dense linear sigma model with quarks, Phys. Rev. D, 2010, vol. 82, p. 125018
- Panos C. P., Chatzisavvas K. C., Complexity classification of quantum many-body systems according to the Pair of Order-Disorder Indices (PODI), 2009

- Panos C. P., Chatzisavvas K. C., Moustakidis C. C., Kyrkou E. G., Comparison of SDL and LMC measures of complexity: Atoms as a testbed, *Physics Letters A*, 2007, vol. 363, p. 78
- Panos C. P., Nikolaidis N. S., Chatzisavvas K. C., Tsouros C. C., A simple method for the evaluation of the information content and complexity in atoms. A proposal for scalability, *Physics Letters A*, 2009, vol. 373, p. 2343
- Parappilly M. B., Bowman P. O., Heller U. M., Leinweber D. B., Williams A. G., Zhang J. B., Scaling behavior of the quark propagator in full QCD, *Phys. Rev. D*, 2006, vol. 73, p. 054504
- Pinto M. B., Koch V., Randrup J., Surface tension of quark matter in a geometrical approach, *Phys. Rev. C*, 2012, vol. 86, p. 025203
- Piza A., *Mecânica Quântica Vol. 51*. EDUSP, 2003
- Popov V., Positron Production in a Coulomb Field with  $Z \geq 137$ , *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1971, vol. 59
- Popov V., Rotondo M., Ruffini R., Xue S.-S., On the relativistic and electro-dynamical stability of massive nuclear density cores, 2009
- Povh B., Rith K., Scholz C. Z., *Particles and Nuclei: An Introduction to the Physical Concepts*. Springer Verlag, 2006
- Provencal J. L., Shipman H. L., Høg E., Thejll P., Testing the White Dwarf Mass-Radius Relation with Hipparcos, *The Astrophysical Journal*, 1998, vol. 494, p. 759
- Provencal J. L., Shipman H. L., Koester D., Wesemael F., Bergeron P., Procyon B: Outside the Iron Box, *The Astrophysical Journal*, 2002, vol. 568, p. 324
- Razeira M., Mesquita A., Vasconcellos C. A. Z., Gomes R. O., Perez Martinez A., Perez Rojas H., Manreza Paret D., Relativistic URCA processes in neutron stars with an antikaon condensate, 2011, vol. 20, p. 146
- Rotondo M., Rueda J. A., Ruffini R., Xue S.-S., Relativistic Thomas-Fermi treatment of compressed atoms and compressed nuclear matter cores of stellar dimensions, *Phys. Rev. C*, 2011a, vol. 83, p. 045805

- Rotondo M., Rueda J. A., Ruffini R., Xue S.-S., The self-consistent general relativistic solution for a system of degenerate neutrons, protons and electrons in  $\beta$  equilibrium, *Physics Letters B*, 2011b, vol. 701, p. 667
- Rotondo M., Ruffini R., Xue S.-S., Electrodynamics for Nuclear Matter in Bulk, *International Journal of Modern Physics D*, 2007, vol. 16, p. 1
- Ruffini R., The role of Thomas-Fermi approach in neutron star matter, 2007, pp 207–218
- Ruffini R., Stella L., Some comments on the relativistic Thomas-Fermi model and the Vallarta-Rosen equation, *Physics Letters B*, 1981, vol. 102, p. 442
- Sañudo J., Pacheco A., Complexity and white-dwarf structure, *Physics Letters A*, 2009, vol. 373, p. 807
- Salpeter E. E., Energy and Pressure of a Zero-Temperature Plasma., *ApJ*, 1961, vol. 134, p. 669
- Saxton C., Ferreras I., Polytopic dark halos of elliptical galaxies, 2009
- Schaffner J., Dover C., Gal A., Greiner W., Millener D., Hyperon-nucleus potentials, *Annals Phys.*, 1984, vol. 235, p. 35
- Schaffner J., Greiner C., Stöcker H., Metastable exotic multihypernuclear objects, *Phys. Rev. C*, 1992, vol. 46, p. 322
- Schaffner-Bielich J., Gal A., Properties of strange hadronic matter in bulk and in finite systems, *Phys. Rev. C*, 2000, vol. 62, p. 034311
- Schechter H., *Introdução à Física Nuclear*. Editora UFRJ, 2007, 448 p.
- Schmitt A., *Dense Matter in Compact Stars: A Pedagogical Introduction*. Lecture Notes in Physics, Springer Berlin Heidelberg, 2010
- Serot B. D., Walecka J. D., *Advances in Nuclear Physics*, 1986, vol. 16
- Shannon C., Weaver W., *The Mathematical Theory of Communication*. University of Illinois Press Urbana, Illinois, 1949

- Shapiro S., Teukolsky S., *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. Wiley, 2008
- Sharma M. M., Borghols W. T. A., Brandenburg S., Crona S., van der Woude A., Harakeh M. N., Giant monopole resonance in Sn and Sm nuclei and the compressibility of nuclear matter, *Phys. Rev. C*, 1988, vol. 38, p. 2562
- Taurines A., , 1999 Estrelas de nêutrons em teorias relativísticas efetivas de campos nucleares
- Taurines A. R., Vasconcellos C. A. Z., Malheiro M., Chiapparini M., Neutron stars in a class of nonlinear relativistic models, *Phys. Rev.*, 2001, vol. C63, p. 065801
- Thomas A., Weise W., *The Structure of the Nucleon*. Wiley, 2010
- Tolman R., *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*. Dover Books on Physics Series, Dover Publications, 1934
- Tolman R. C., Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid, *Phys. Rev.*, 1939, vol. 55, p. 364
- Valentim R., Rangel E., Horvath J. E., On the mass distribution of neutron stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2011, vol. 414, p. 1427
- van den Heuvel E. P. J., Compact stars and the evolution of binary systems, *Bulletin of the Astronomical Society of India*, 2011, vol. 39, p. 1
- Vasconcellos C. A. Z., Gomes R. O., Dexheimer V., Negreiros R. P., Horvath J., Hadjimichef D., Effective field theory for neutron stars with genuine many-body forces, *Astronomische Nachrichten*, 2014, vol. 335, p. 763
- Vereshchagin G., Ruffini R., Xue S., Electron-positron pairs in physics and astrophysics: From heavy nuclei to black holes, *The Astrophysical Journal Letters*, 2010, vol. 1
- Walecka J., A theory of highly condensed matter, *Annals of Physics*, 1974, vol. 83, p. 491
- Weber F., *Pulsars as Astrophysical Laboratories for Nuclear and Particle Physics*. Series in High Energy Physics, Cosmology and Gravitation, Taylor & Francis, 1999



- 
- Weber F., Strange quark matter and compact stars, *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 2005, vol. 54, p. 193
- Weber F., Negreiros R., QCD in Neutron Stars and Strange Stars, *AIP Conference Proceedings*, 2011, vol. 1354, p. 13
- Weinberg S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, 1972, 688
- Weinberg S., *The First Three Minutes: A Modern View of the Origin of the Universe*. Basic Books, 1993
- Weissenborn S., Sagert I., Pagliara G., Hempel M., Schaffner-Bielich J., Quark Matter in Massive Compact Stars, *The Astrophysical Journal Letters*, 2011, vol. 740, p. L14
- Weizsäcker C., Zur Theorie der Kernmassen, *Zeitschrift für Physik*, 1935, vol. 96, p. 431
- Wilson K. G., Confinement of quarks, *Phys. Rev. D*, 1974, vol. 10, p. 2445
- Witten E., Cosmic separation of phases, *Phys. Rev. D*, 1984, vol. 30, p. 272
- Woltjer L., X-Rays and Type i Supernova Remnants., *ApJ*, 1964, vol. 140, p. 1309
- Wood M., *Proceedings of the 9th European Workshop on White Dwarfs*, 1995
- Yasutake N., Chen H., Maruyama T., Tatsumi T., Finite size effects in hadron-quark phase transition by the Dyson-Schwinger method, *Journal of Physics: Conference Series*, 2016, vol. 665, p. 012068
- Yasutake N., Maruyama T., Tatsumi T., Hot hadron-quark mixed phase including hyperons, *Phys. Rev.*, 2009, vol. D80, p. 123009
- Zimanyi J., Moszkowski S. A., Nuclear equation of state with derivative scalar coupling, *Phys. Rev. C*, 1990, vol. 42, p. 1416



# Apêndice



## Transições de fase contínuas

Neste apêndice, será discutido a questão das cargas conservadas e suas implicações nos aspectos gerais da transição de fase e, a seguir, será apresentado o critério de Gibbs.

Em geral, pressão constante é característica da transição de fase em primeira ordem para uma substância que tenha um único componente independente. A água é um exemplo. A transição líquido-vapor na água tem  $H_2O$  como única “carga” conservada ou único componente independente. Já a matéria das estrelas de nêutrons tem dois componentes independentes – o número bariônico conservado e a carga elétrica total (que é nula). Portanto, a matéria das estrelas de nêutrons não é uma substância “simples”, mas sim “complexa” – ela tem mais de um componente independente. As características da transição de fase são bastante diferentes nos dois casos. A diferença surge porque uma substância complexa possui graus de liberdade que uma substância simples não tem. As estrelas devem ter neutralidade de carga. Essa afirmação é pertinente à carga da estrela como um todo. É uma restrição global, e não local, a qual, por sua vez, corresponderia a uma densidade de carga identicamente nula. Como a natureza exige apenas neutralidade global, se for energeticamente favorável que existam cargas separadas, assim será. Temos vários exemplos de sistemas desse tipo, como o nêutron e o átomo. Ambos possuem distribuições de carga finitas, cuja integração em todo volume simplesmente resulta nula. Para entendermos um pouco melhor, vamos considerar uma substância com duas “cargas” conservadas ou componentes independentes –  $Z$  de um tipo e  $B$  de outro.

No caso de uma estrela de nêutrons, essas letras poderiam denotar o número de cargas totais (em unidades da carga elementar  $e$ ) e o número total de carga bariônica. Esteja a substância imersa em um banho térmico. Definimos, então, a concentração  $c = Z/B$ . A razão é fixa somente enquanto o sistema estiver em uma fase pura ou em outra. Na fase

mista, a concentração em cada uma das regiões de uma fase ou da outra pode ser diferente, estando o sistema sujeito apenas à conservação dos números totais,

$$c_1 = Z_1/B_1, c_2 = Z_2/B_2, Z_1 + Z_2 = Z, B_1 + B_2 = B. \quad (\text{A.1})$$

Se as forças internas puderem diminuir a energia do sistema fazendo um rearranjo das concentrações, elas assim o farão. O ponto essencial é que as leis de conservação na química termodinâmica são globais, e não locais. Além disso, as concentrações  $c_1$  e  $c_2$  serão otimizadas pelas forças internas do sistema para cada proporção das duas fases, de modo que as propriedades das fases variam na fase mista. Isso contrasta claramente com a transição líquido-vapor na água ou em outra substância com componente único.

As transições de fase hádron-quark podem ser transições de primeira ordem em um sistema multicomponente, no qual duas cargas serão globalmente conservadas. De acordo com o critério de Gibbs/Glendenning, o requisito de duas cargas conservadas fará com que o comportamento da equação de estado na fase mista seja diferente de um sistema no qual apenas uma carga é conservada. Nesse contexto, a pressão varia ao longo da fase mista, não obedecendo a uma construção de Maxwell onde a pressão é constante. Uma pressão variável permite que a transição de fase ocorra no interior de estrelas de nêutrons, uma vez que o equilíbrio hidrostático pode ser estabelecido.

### *Cargas conservadas*

Vimos que para que ocorra a transição de fase no cenário de estrelas de nêutrons, é preciso que o número bariônico e a carga elétrica sejam quantidades conservadas. Porém, até o presente momento não foi feita nenhuma ressalva quanto a esse comportamento ser global ou local, ou seja, se a conservação dessas quantidades deve se dar em cada fase separadamente ou simplesmente ser válida para toda a estrela. Glendenning (1992) propõe que as leis de conservação no âmbito de estrelas compactas devem ser globais. Sob essa perspectiva, é possível diminuir a assimetria de isospin da fase hadrônica fazendo com que esta possua uma carga líquida positiva, compensada por uma fase de quarks de carga líquida negativa. Neste mesmo trabalho, Glendenning propõe que a conservação de número bariônico também deve ser global, uma vez que esse vínculo será mais fraco para um arranjo microscópico que uma condição de conservação local.

Para estabelecer as leis de conservação na transição de fase, definimos um parâmetro:

$$\chi = V_Q/V, \quad (V = V_H + V_Q) \quad (\text{A.2})$$

que define a fração de matéria de quarks presente no meio para uma dada densidade bariônica total. Assim, a fase puramente hadrônica é definida por  $\chi = 0$  e a fase puramente de quarks por  $\chi = 1$ . A fase mista compreenderá o intervalo intermediário,  $0 < \chi < 1$ . Estabelecemos a relação de conservação global de número bariônico através da equação:

$$(1 - \chi)\rho_H + \chi\rho_Q = \rho_{BT} \quad (\text{A.3})$$

onde  $\rho_H$  e  $\rho_Q$  correspondem, respectivamente, à densidade bariônica total na fase hadrônica e na fase de quarks, e  $\rho_{BT}$  à densidade bariônica total do sistema. Analogamente, a conservação global de carga elétrica será expressa por:

$$(1 - \chi)q_H + \chi q_Q = Q/V \quad (\text{A.4})$$

onde  $q_H$  e  $q_Q$  correspondem, respectivamente, à densidade de carga elétrica total da fase hadrônica e de quarks, e  $Q$  à carga elétrica total do sistema.

### *Critério de Maxwell e Gibbs/Glendenning*

Uma vez feita a discussão acerca das quantidades conservadas, devemos agora relacionar as variáveis termodinâmicas do sistema às suas quantidades independentes. Como dito anteriormente, trata-se de um sistema multicomponente e, para tais sistemas, o comportamento das variáveis termodinâmicas apresenta diferenças com relação aos monocomponentes.

Através do critério de Gibbs estabelece-se o equilíbrio entre as fases, de maneira que a energia do sistema seja minimizada. Para uma temperatura fixa, as condições de Gibbs são expressas por:

$$\mu_{H,n} = \mu_{Q,n} = \mu_n \quad (\text{A.5})$$

$$\mu_{H,e} = \mu_{Q,e} = \mu_e \quad (\text{A.6})$$

$$p_H(\mu_n, \mu_e, T) = p_Q(\mu_n, \mu_e, T) \quad (\text{A.7})$$

Na fase de hádrons, os potenciais químicos independentes envolvidos são o do nêutron e do elétron (Shapiro e Teukolsky (2008)). Verifica-se os mesmos potenciais químicos

independentes para a fase de quarks, pois em Schmitt (2010) identifica-se tais potenciais como sendo o do quark up e do elétron e o potencial químico do quark up pode ser escrito em termos de  $\mu_n$  e  $\mu_e$ . Assim, ao longo da fase mista devemos assumir que essas quantidades serão as mesmas nas duas fases, conforme mostram as duas primeiras equações acima. Uma vez que objetos compactos geralmente são modelados à temperatura nula, a terceira condição de Gibbs não costuma ser considerada.

Devemos, agora, verificar que apesar do vínculo de que as equações de estado das duas fases devam ser iguais ao longo da fase mista, isso não significa que a pressão deva ser constante nesse intervalo de densidades. Isso se deve ao fato de a pressão em cada fase depender de dois potenciais químicos independentes, pois para cada valor de  $\chi$  ao longo da transição, os valores de  $\mu_n$  e  $\mu_e$  variam de modo que as condições de Gibbs sejam satisfeitas. Se apenas uma carga é conservada, a pressão dependerá de apenas um potencial químico, sujeito a uma única lei de conservação, não podendo variar. Assim, concluímos que a variação da pressão ao longo da fase mista deve-se à ocorrência de mais de uma carga conservada, que nada mais é que uma consequência do sistema ser multicomponente. O comportamento da pressão e dos potenciais químicos independentes na fase mista é ilustrado na Fig.A.1, para uma equação de estado genérica (Weber (1999)):

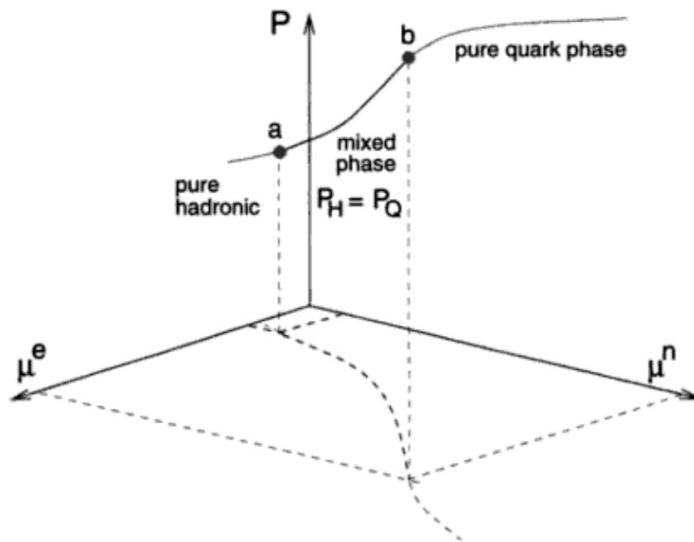


Figura A.1: Fase mista para uma transição com duas cargas conservadas (Weber, 1999).

Portanto, para determinarmos as variáveis termodinâmicas ao longo da fase mista, devemos variar o parâmetro  $\chi$  e resolver um sistema de três incógnitas ( $\mu_n$ ,  $\mu_e$ ,  $\rho_B$ ) e três



equações: duas equações de leis de conservação de carga elétrica e número bariônico e a equação para condição de equilíbrio de Gibbs (A.7).

### *Estrutura da fase mista*

O surgimento de estruturas na fase mista é um fenômeno bastante conhecido no que se refere às transições de fase de primeira ordem. A ocorrência dessas estruturas deve-se à competição entre as energias de Coulomb e de superfície associadas às regiões de carga líquida não nula presentes separadamente nas fases hadrônica e de quarks.

Para uma dada densidade bariônica para a qual o início da transição é prevista, começam a surgir gotas da fase de quarks no interior da fase hadrônica. Essas gotas crescem conforme a densidade do sistema aumenta até o ponto no qual existe a mesma proporção de matéria entre as fases. Seguindo para densidades ainda mais altas, a situação se inverte e o sistema passa a poder ser interpretado como bolhas da fase hadrônica embebidas em uma fase de quarks. Essas bolhas tornam-se cada vez menores conforme a densidade aumenta até um ponto no qual passamos a ter apenas uma fase puramente de matéria de quarks. Quando há a presença de campos externos, a forma dessas estruturas pode variar. Em especial, no contexto estelar no qual a pressão e densidade são cada vez maiores para um raio estelar cada vez menor, as estruturas iniciais serão gotas, mas conforme consideramos raios menores, haverá o surgimento de estruturas como “barras” e “tábuas” de fase de quarks e, analogamente ao caso apresentado acima, para um determinado valor de raio ocorrerá a inversão. A partir desse ponto, se seguirmos ainda mais em direção ao núcleo da estrela, passamos a identificar tábuas, barras e, finalmente, gotas de fase hadrônica até que a transição seja completa. Aqui, é importante ressaltar a possibilidade de existência de estrelas que não tenham uma transição completa, no qual seu núcleo será composto por uma fase mista, no qual tais estruturas devem ser encontradas. A Fig.A.2 mostra o esquema de formação de estruturas na fase mista de matéria de nêutrons e prótons em função da densidade (Newton, 2013), e a Fig.A.3 mostra as estruturas que podem ser encontradas em uma transição quark-hádrons (Yasutake et al., 2009).

O estudo de estruturas na fase mista está fora do escopo desse trabalho, contudo tal tópico é de grande importância para o estudo de alguns fenômenos que até o presente momento não possuem uma explicação completa no contexto de estrelas compactas. O

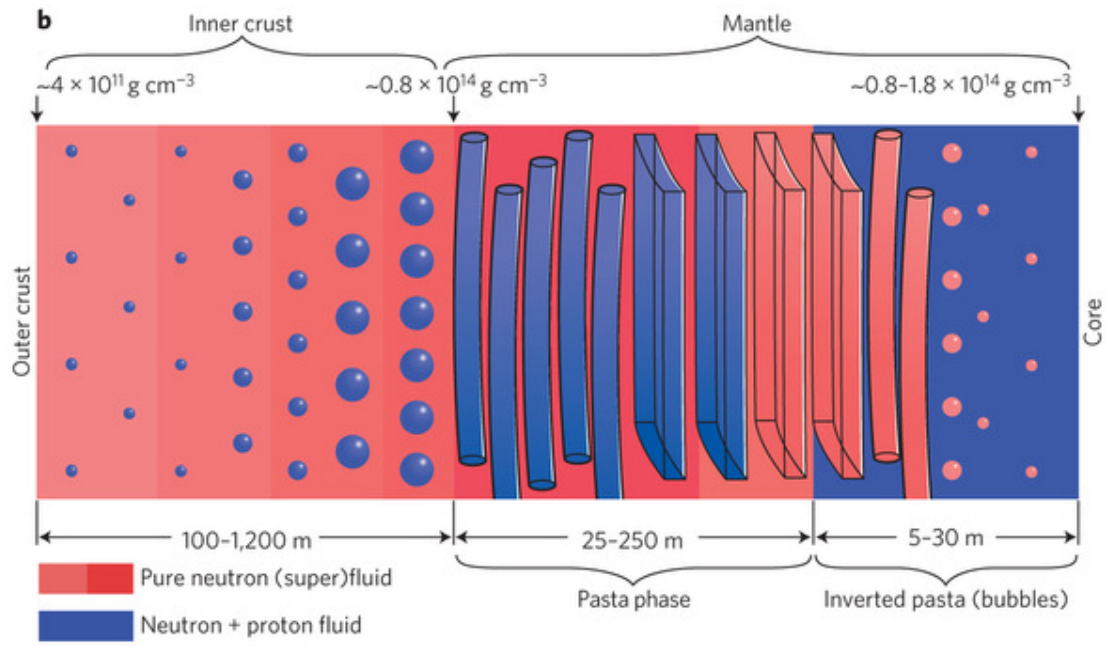


Figura A.2: Diagrama esquemático da pasta nuclear na fase hadrônica (Newton, 2013).

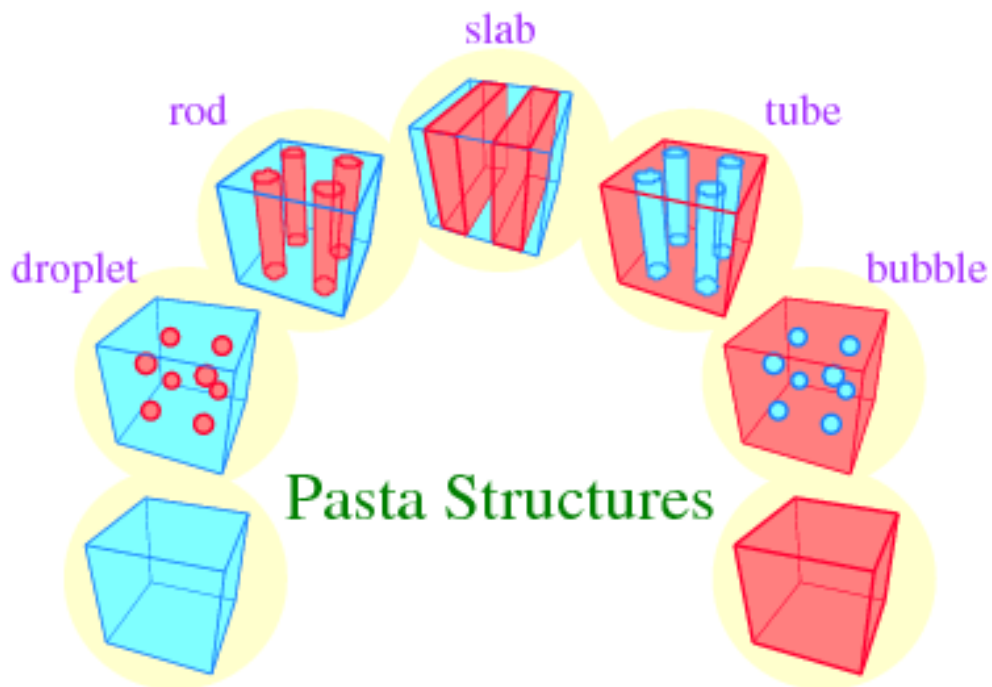


Figura A.3: Pasta nuclear na transição quark-hadron (Yasutake et al., 2009).

primeiro desses fenômenos são os denominados *glitches*. Um *glitch* é o fenômeno no qual ocorre um aumento repentino, de duração irregular, do período de um pulsar, seguido de um decréscimo que retorna o valor original do período. O período de tempo entre os *glitches* varia de meses a anos e tal fenômeno possui características muito específicas para cada objeto em particular. No estudo de Espinoza et al. (2011) são citadas a existência de medidas de cerca de 315 *glitches* em 102 pulsares e a causa para tal fenômeno permanece um tópico em aberto. Existem estudos (Glendenning e Pei (1995); Bejger et al. (2005); Endo (2011)) que relacionam as estruturas da fase mista a esse fenômeno através do argumento de que as estruturas das diferentes fases presentes ao longo da estrela possuem momentos de inércia distintos que, uma vez em interação, podem gerar um *glitch*. Os tempos medidos nos *glitches* indicam um acoplamento variável de alguma componente superfluida, porém não indica que a pasta nuclear tenha alguma influência no efeito.

A fase mista, oriunda do fato de assumirmos uma transição de fase de primeira ordem, também possui implicações para o estudo de ondas gravitacionais. As discontinuidades oriundas do início e final da transição podem afetar o espectro de frequência dos modos de oscilação não-radiais, que são utilizadas nos cálculos de sinais detectáveis de ondas gravitacionais (Miniutti et al. (2003)).



## Apêndice B

---

### Equação de Lane-Emden Perturbada

#### B.1 Dedução da equação de Lane-Emden perturbada

Em Bertolami et al. (2009), os autores do paper propõem um potencial gravitacional corrigido, dado por

$$V(r) = -\frac{GM}{2r} \left[ 1 + \left( \frac{R_G}{r} \right)^{2d_u-2} \right] \quad (\text{B.1})$$

Este potencial, através da relação  $\vec{F} = -\nabla V(r)$ , nos leva a uma equação de equilíbrio hidrostático perturbada, dada por

$$\frac{r^2}{\rho} \frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM}{2r} \left[ 1 + (2d_u - 1) \left( \frac{R_G}{r} \right)^{2d_u-2} \right] \quad (\text{B.2})$$

que após algumas manipulações algébricas, chega-se em

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = \frac{-\theta^n}{2} \left[ 1 + (2d_U - 1) \left( \frac{\xi_G}{\xi} \right)^{2d_U-2} \right] - (2d_U - 1)(d_U - 1) \frac{1}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} \left( \frac{\xi_G}{\xi} \right)^{2d_U-2} \quad (\text{B.3})$$

#### B.2 Soluções numéricas para o modelo de *unparticles*

Neste apêndice, são mostrados os comportamentos da equação de Lane-Emden perturbada para  $n=3/2$ . Conforme visto no capítulo 9, não existem soluções analíticas para índice politrópico  $n=3/2$ , o que nos leva a procurar soluções numéricas. Através da utilização do software Mathematica, buscou-se dois tipos de solução: A solução perturbada variando o parâmetro  $D_U$ , mantendo  $\xi_G$  fixo, e o inverso, fixando  $D_U$  e variando o parâmetro  $\xi_G$ .

Na Fig. B.1, vemos as soluções da equação perturbada, onde o parâmetro  $D_U$  variou de 0.5 a 1.5, e o parâmetro  $\xi_G$  foi mantido fixo em  $\xi_G = 0.1$ . Neste momento do estudo, os valores dos parâmetros ainda não tem significado físico, sendo fixados nestes números específicos apenas para estudo do comportamento da função.

Na Fig. B.2, vemos as soluções da equação perturbada, agora fixando o parâmetro  $D_U$  em 0.9, e o parâmetro  $\xi_G$  foi variando de 1 a 101. Variações menores não alteraram significativamente o valor do raio adimensional  $\xi_1$ .

Uma primeira análise pode ser feita a respeito dos zeros  $\xi_1$ , observando a variação dos parâmetros. Pode-se ver que uma grande variação em  $\xi_G$  não altera significativamente a solução da equação, porém uma alteração em  $D_U$  o faz. Na Tab. B.2, pode-se verificar a variação no raio adimensional da superfície da estrela  $\xi_1$  em função da variação de  $D_U$ , com  $\xi_G$  fixo. Como foi visto na Eq. (9.13)<sup>1</sup>, os valores da Tab. B.2 determinam o raio da estrela.

*Tabela B.1* - Valores de  $\xi_1$ , ou seja, o valor onde a curva intercepta o eixo  $\xi$ , que fornece o raio na superfície da estrela, bem como sua temperatura e pressão, para um polítropo perturbado com  $n=3/2$  e parâmetro  $\xi = 0.1$  e  $D_U$  variando de 0.5 a 1.5

$D_U$	$\xi_1$
0,5	5,16715
0,7	2,59617
0,9	3,21017
1,1	4,08593
1,3	4,72957
1,5	5,01918

Para efeitos deste trabalho, como verificado anteriormente, a variação do parâmetro  $\xi_G$  não muda significativamente a solução para uma variação de  $D_U$ . Assim, fixando  $\xi_G = 1$ , calculou-se as soluções com variação de  $D_U$ , tal que  $0.5 \leq D_U \leq 1.5$ , conforme mostra a Tab. B.2.

<sup>1</sup> Seq. 9.1.2

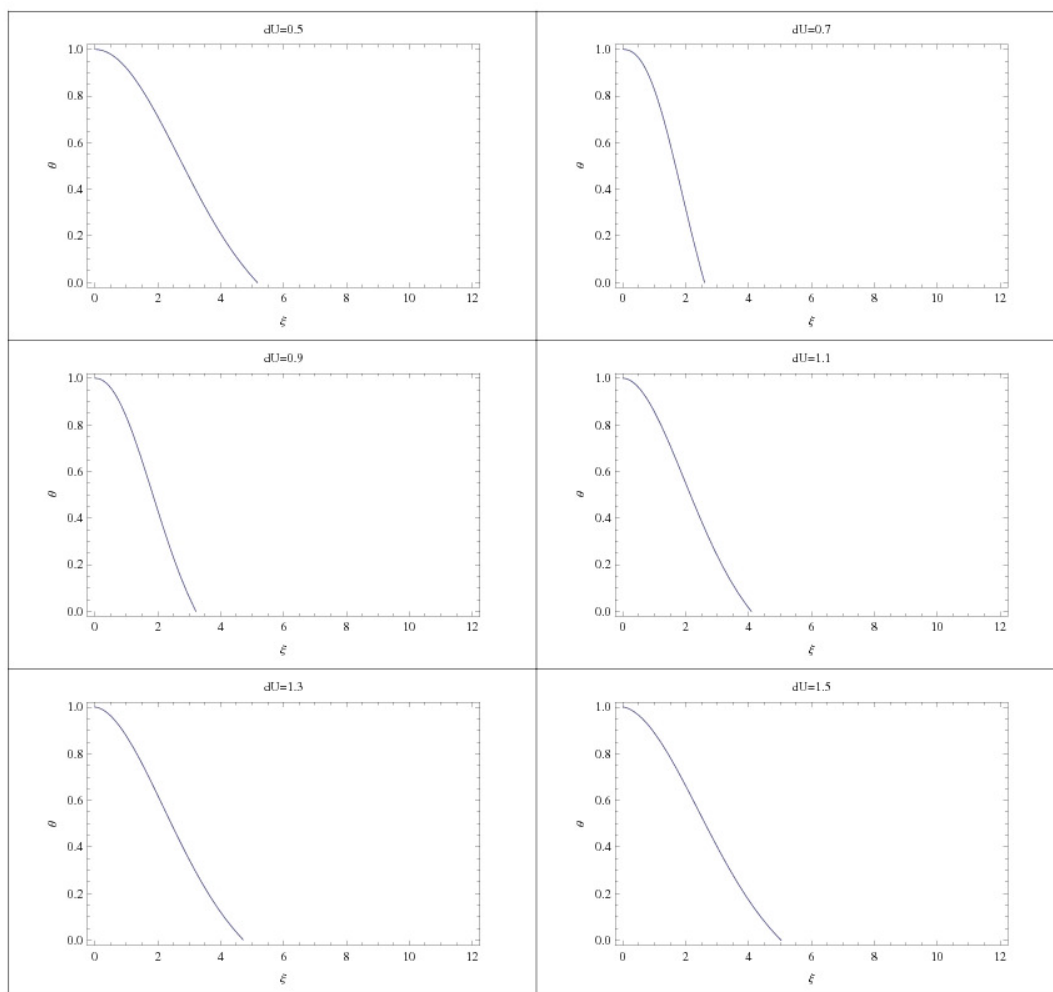


Figura B.1: Variação de  $D_U$  para  $n=3/2$

Tabela B.2 - Soluções para a equação de Lane-Emden perturbada com  $n = 3/2$ , com os valores de  $\xi_*$  e  $\theta(\xi_*)$ , com o parâmetro fixo  $\xi_G = 1$  e  $D_U$  variando de 0.5 a 1.5

$D_U$	$\xi_1$	$\theta(\xi_*)$
0.5	5.16711	-0.143760
0.55	4.54784	-0.189476
0.6	4.23030	-0.215755
0.63	4.09523	-0.226387
0.65	4.02212	-0.231621
0.7	3.88193	-0.239447
0.75	3.78298	-0.241607
0.8	3.88193	-0.221160
0.9	3.65429	-0.224529
1.0	3.65374	-0.203303
1.1	3.70446	-0.179718
1.2	3.79715	-0.157419
1.3	3.91983	-0.139016
1.4	4.05821	-0.125441
1.5	4.20321	-0.116013

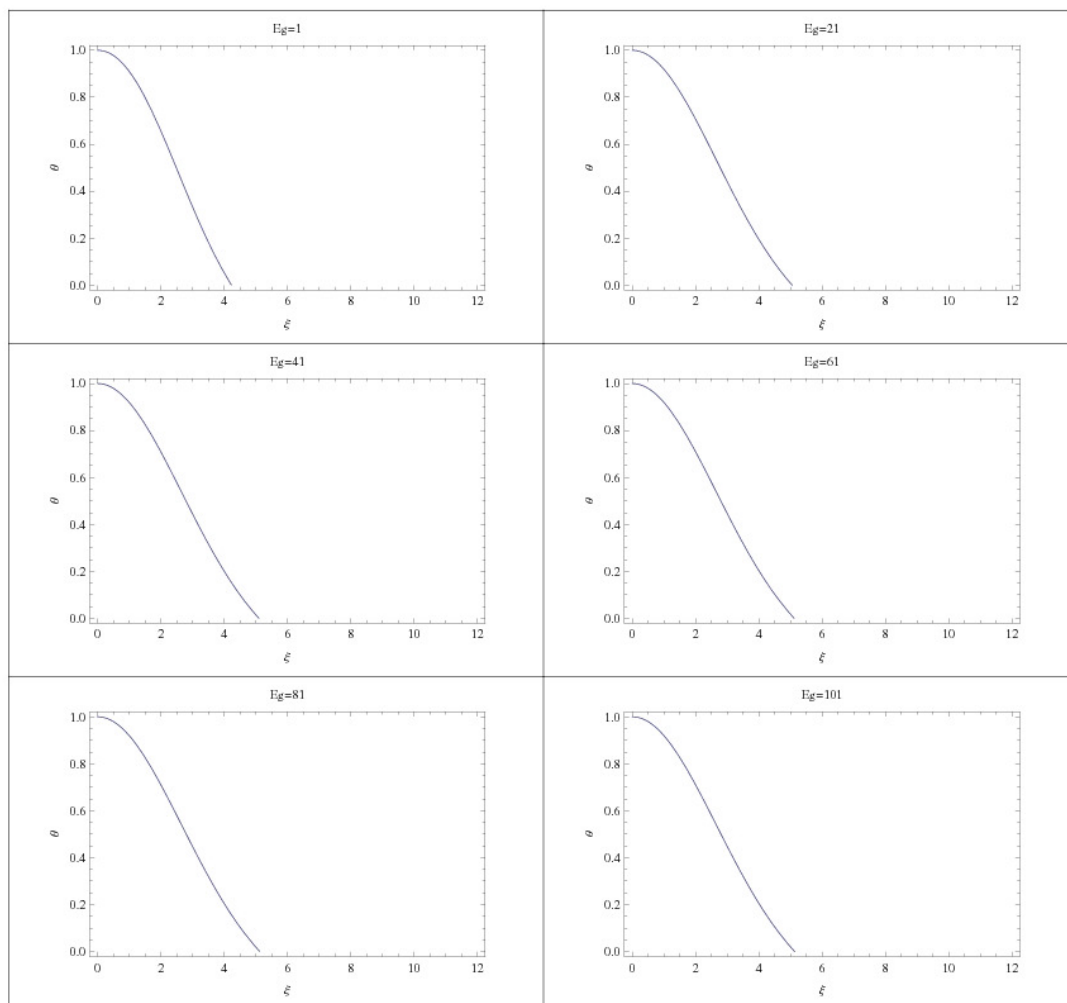


Figura B.2: Variação de  $\xi_G$  para  $n=3/2$



## Apêndice C

---

### Artigos Publicados

Contribuições publicadas no período de pós-graduação.

*Reducing the parameter space for Unparticle models using white dwarf masses.*

Paper publicado na revista Physical Review D, Volume 86, Issue 2, 2012.

# Reducing the parameter space for unparticle-inspired models using white dwarf masses

Rodrigo Alvares de Souza\* and J. E. Horvath†

*Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da USP Rua do Matão 1226, Cidade Universitária,  
05508-090, São Paulo, Brazil*

(Received 27 March 2012; published 6 July 2012)

Based on astrophysical constraints derived from Chandrasekhar's mass limit for white dwarfs, we study the effects of the model on the parameters of unparticle-inspired gravity, on scales  $\Lambda_U > 1$  TeV and  $d_U \approx 1$ .

 DOI: [10.1103/PhysRevD.86.027502](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.027502)

PACS numbers: 04.20.Fy, 04.80.Cc, 04.25.Nx

## I. INTRODUCTION

Many proposals for explaining the apparent shortcomings of the standard model have been advanced. The unparticle model proposed by Georgi [1] aimed to include in the standard model massive but scale-invariant particles, sharing the same physics of the scale-dependent counterparts. These objects, called “unparticles,” could play an important role in low-energy physics [2], since the model implies that unparticles can be exchanged between massive particles, leading to a new force called “ungravity.” This “fifth” force would add a perturbation term to the Newtonian gravitational potential, although the exact potential cannot be obtained because the distance at which the perturbed potential matches the Newtonian expression needs to be known. In order to bypass this limitation, the perturbed potential has been assumed to be of the form [2]

$$V(r) = -\frac{GM}{2r} \left[ 1 + \left( \frac{R_G}{r} \right)^{2d_U-2} \right], \quad (1)$$

where  $d_U$  (the scaling dimension of the unparticles operator  $O_U$ ) is  $\approx 1$ , as a reasonable approximation, and  $R_G$  is the characteristic length scale of ungravity, given by

$$R_G = \frac{1}{\pi \Lambda_U} \left( \frac{M_{Pl}}{M_*} \right)^{1/(d_U-1)} \times \left[ \frac{2(2-\alpha)\Gamma(d_U+1/2)\Gamma(d_U-1/2)}{\pi \Gamma(2d_U)} \right]^{1/(d_U-1)}, \quad (2)$$

where  $\Lambda_U$  is the energy scale of the unparticle interactions,  $M_{Pl} = 2.4 \times 10^{18}$  GeV is the Planck mass, and  $\alpha$  is a constant dependent on the type of propagator considered.

The problem addressed in this work is to determine the bounds of the mass of the interaction (un)particle  $M_*$  with  $d_U \approx 1$ . For this purpose, a suitable quasi-Newtonian gravitational system needs to be studied and compared with the pure Newtonian results. A first study of this regime by Bertolami, Páramos, and Santos [3] has addressed the stellar equilibrium problem, deriving a perturbed Lane-Emden equation further applied to the Sun. They explored the well-known similarity of the full stellar

structure to an  $n = 3$  polytropic model, and derived limits from the maximum allowed uncertainty in the central temperature  $\Delta T_c/T_c = 0.06$ .

In spite of the successful derivation of meaningful limits to the unparticle parameters, it is known that the detailed structure of the Sun is actually quite complicated, and many physical factors have to be considered beyond the simplest Chandrasekhar's polytropic model [4]. Therefore, it is worth considering another very well-known system to which the Chandrasekhar theory gives an even better representation: the white dwarf sequence. We shall show below that an important feature of these sequences (the maximum mass) is sensitive to the unparticle quantities and allows us to impose strong limits on them.

## II. STELLAR EQUILIBRIUM AND WHITE DWARFS

Since Chandrasekhar's polytropic model is widely known, we briefly recall how the unparticle theory modifies it, as first shown by Bertolami, Páramos, and Santos [3]. The equations of stellar hydrostatic equilibrium and mass conservation can be reduced to a second order differential equation, if a polytropic equation of state of the form  $P = K\rho^{1+1/n}$  is assumed to hold. If the density is written as  $\rho = \rho_c \theta^n$ , and the radius as  $r = \beta \xi$ , one can easily obtain the original Lane-Emden equation

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n, \quad (3)$$

where  $n$  is the polytropic index,  $\xi$  is the dimensionless radius, and  $\beta$  is given by

$$\beta = \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \rho_c^{(1/n)-1} \right]^{1/2}, \quad (4)$$

$K$  being the polytropic constant dependent on the specific value of  $n$ . This equation is subject to the usual boundary conditions:  $\rho(r=0) = \rho_c$  and  $dP/dr = 0$  for  $r = 0$ , which translates to  $\theta(\xi=0) = 1$  and  $\theta'(\xi=0) \equiv d\theta/d\xi = 0$ . The detailed derivation of the Lane-Emden equation can be consulted in the classical reference [4]. These results can be used to derive the mass-radius relation, given by Eq. (5):

\*rodrigo.souza@usp.br

†foton@astro.iag.usp.br

$$m(r) = 4\pi \left(\frac{r}{\xi_*}\right)^{(3-n)/(1-n)} \left(\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right)^{n/(n-1)} \xi_*^2 |\theta'(\xi_*)|. \quad (5)$$

Considering that white dwarfs are small stars composed by electron-degenerate matter, in which the core material no longer undergoes fusion reactions, the Lane-Emden equation describes very well their behavior as a result of the proximity of the electronic component to a polytropic form. As is well known, in the nonrelativistic limit the white dwarf matter can be represented by a  $n = 3/2$  polytrope and in the relativistic case the  $n = 3$  is quite accurate.

The same technique employed by Chandrasekhar can be used to obtain the perturbed Lane-Emden equation. From the perturbed potential given by Eq. (1), the perturbed gravitational acceleration can be obtained via  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$  [5], used to determine the hydrostatic equilibrium equation, as seen in Eq. (6):

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{2r^2} \left[ 1 + (2d_U - 1) \left(\frac{R_G}{r}\right)^{2d_U-2} \right]. \quad (6)$$

Then, from this hydrostatic equilibrium equation, Bertolami, Páramos, and Santos derived a perturbed Lane-Emden equation

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) &= \frac{-\theta^n}{2} \left[ 1 + (2d_U - 1) \left(\frac{\xi_G}{\xi}\right)^{2d_U-2} \right] \\ &\quad - (2d_U - 1)(d_U - 1) \frac{1}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} \left(\frac{\xi_G}{\xi}\right)^{2d_U-2} \end{aligned} \quad (7)$$

in order to examine meaningful bounds on the parameters  $R_G$  in Eq. (2), from which one can obtain the bounds of the mass of the interaction (un)particle  $M_*$  based on astrophysical constraints (the parameter  $\xi_G = R_G/\beta$  has been defined here to simplify the expressions). We have corrected a slight misprint in the paper [3] which would preclude the derivation of Eq. (7), related to the definition of the variable  $\beta$  as given by (4).

Once these matters are settled, the perturbed mass-radius relation can be obtained in the usual manner, being formally identical to the analogous mass-radius relation given by Chandrasekhar [Eq. (5)], but with the perturbative effects present through the solutions of the perturbed Lane-Emden equation and its derivative ( $\theta(\xi_1)$  and  $\theta'(\xi_1)$ ), respectively, both evaluated at the first zero as in Ref. [4]. This modification sets the stage for an analysis leading to novel bounds on the unparticle parameters. Since we are interested on the maximum possible mass for a white dwarf, we set the parameters related to the Lane-Emden model to the relativistic limit (polytropic index  $n = 3$ ), and the white dwarf mass-radius relation becomes

$$M = 4\pi \left(\frac{K}{\pi G}\right)^{3/2} \xi_*^2 |\theta'(\xi_*)| \quad (8)$$

losing any dependence on the radius, as expected.

The key feature pointed out above, related to the explicit dependence of the maximum mass through the zero of the Lane-Emden function and its slope, leads to quite a strong dependence of the maximum mass with  $d_U$  and  $R_G$ , which can be substantially different from the ‘‘canonical’’  $M_{Ch} = 1.457(2/\mu_e)^2 M_\odot$  [4,6].

### III. OBSERVATIONS AND ANALYSIS

Following the framework presented by Bertolami, Páramos, and Santos, we obtained the numerical solutions of Eq. (7) varying both parameters  $\xi_G$  and  $d_U$ , and used these solutions on Eq. (8) to determine the masses associated to the combination of  $d_U$  and  $\xi_G$ . It is important to note that the combination  $\xi_G$  and  $d_U$  generated a broad range of masses, spanning from  $M \approx 1.291M_\odot$  to  $M \approx 1.874M_\odot$ . This in turn means that it is possible to constrain the parameters based on the maximum mass for white dwarfs, because this mass must comply with the values obtained by observational data. Following this reasoning, we assumed three reasonable values for the maximum mass

- (i) the maximum observed masses in a large white dwarf sample, from the recent work by Kepler and collaborators [7], is  $M = 1.33M_\odot$ . Nevertheless, in order to effectively constrain the values of  $d_U$  near 1, we had to consider masses of at least  $M = 1.36M_\odot$ , otherwise  $d_U$  would be far from 1 and the gravitational corrections in Eq. (1) would be too large;
- (ii) the ‘‘canonical’’ limit,  $M_{Ch} = 1.457M_\odot$  for carbon-type white dwarfs; in spite of the fact that this widely accepted value is still beyond the actual observed maximum, its use seems very reasonable;
- (iii) an even larger value, above the former ‘‘Chandrasekhar’s’’ limit,  $M = 1.60M_\odot$ , arbitrarily chosen to represent an extreme limit allowed in nature. If true, the number of objects between the actually observed maximum  $M = 1.33M_\odot$  and this proposed extreme value of  $M = 1.60M_\odot$  must be substantial in a large sample such as the one analyzed by Kepler *et al.* [7], although none has been actually reported.

From the data above mentioned, we constructed the contour plots where the combination of  $d_U$  and  $\xi_G$  generates the desired maximum mass. This plots are depicted in Fig. 1 for ranges larger than the radius of the star ( $\xi_G > 1$ ,  $d_U \lesssim 1$ ) and in Fig. 2 for ranges smaller the radius of the star ( $\xi_G < 1$ ,  $d_U \gtrsim 1$ ). One should note that for  $d_U \gtrsim 1$ , only masses of  $M = 1.36M_\odot$  and  $M = 1.457M_\odot$  are obtained, while a mass of  $M = 1.6M_\odot$  can be imposed for  $d_U \lesssim 1$  only.

The connection with the (un)particle mass follows by solving equation Eq. (2), for the ratio  $M_*/M_{Pl}$ , namely

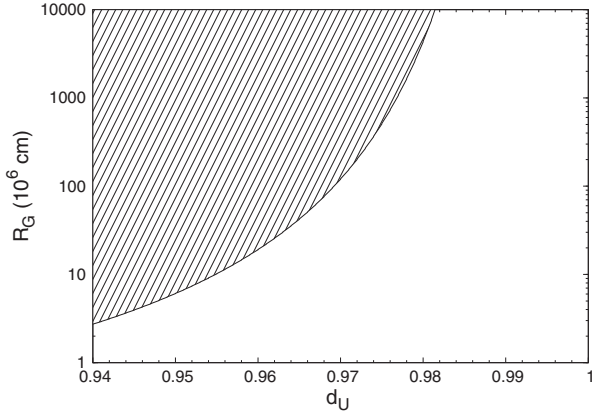


FIG. 1. Contour plot (*locus*) of maximum mass ( $M = 1.6M_\odot$ ) in the  $R_G$ - $d_U$  plane, for an interaction range larger than the radius of the star. The dashed area gives masses bigger than  $M = 1.6M_\odot$ , and should be considered as forbidden.

$$\frac{M_*}{M_{Pl}} = [\pi \Lambda_U R_G(d_U)]^{1-d_U} \times \left[ \frac{2(2-\alpha)}{\pi} \frac{\Gamma(d_U + 1/2)\Gamma(d_U - 1/2)}{\Gamma(2d_U)} \right]^{1/2}, \quad (9)$$

which, by using  $R_G(d_U)$  defined in the plots above, it is possible to infer the mass of the interaction (un)particle  $M_*$ . We point out that this procedure differs significantly from the method used by Bertolami, Páramos, and Santos [3], where the 6% uncertainty leads to terms  $R_-(d_U)$  and  $R_+(d_U)$ , because we use exact values for the maximum

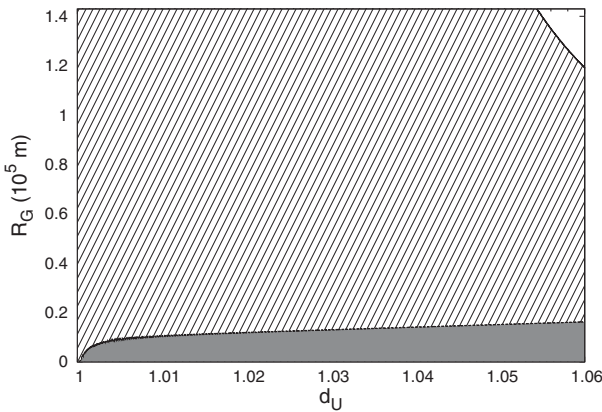


FIG. 2. Contour plot (*locus*) of maximum masses  $M = 1.36M_\odot$  and  $M = 1.457M_\odot$  in the  $R_G$ - $d_U$  plane, for an interaction range smaller than the radius of the star. The curve spanning from  $1.055 < d_U < 1.06$  (upper right corner of the graphic) produces a maximum mass of  $M = 1.36M_\odot$  and the curve between  $1 < d_U < 1.06$  (lower side of the graphic) the mass of  $M = 1.457M_\odot$ . The upper white area gives maximum masses lower than  $M = 1.36M_\odot$ , the dashed area yields masses in the range  $1.36M_\odot < M < 1.457M_\odot$ , and the lower area produces masses bigger than  $1.457M_\odot$ . If one accepts the latter value as the maximum allowed, the dark area is forbidden.

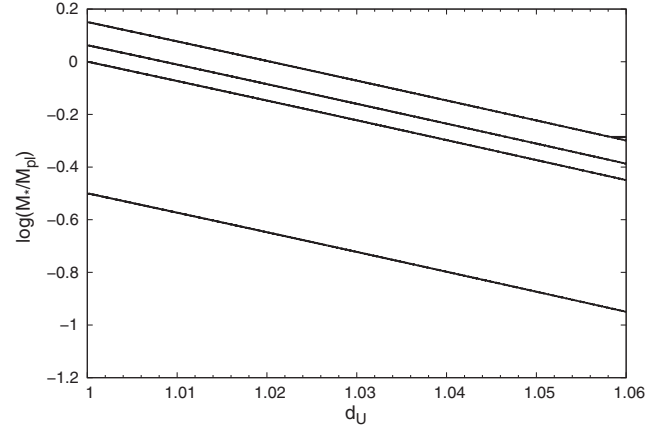


FIG. 3. Lower bounds on  $\log(M_*/M_{Pl})$ , for  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 2/3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 1.9$ , from top to bottom respectively. The fixed values are  $\Lambda_U = 1$  TeV and  $M = 1.457M_\odot$ .

masses. Nevertheless, it is clear that the ratio must be interpreted as a lower bound to the ratio  $M_*/M_{Pl}$ , considering that lower maximum masses (which would be in conflict with observations, as stated before) would result in even lower ratios. Plotting the ratio as a function of  $d_U$  and fixing the parameters  $\alpha$  and  $\Lambda_U$  in the same way as Bertolami, Páramos, and Santos, we obtain the ranges for the mass of the interaction (un)particle depicted in Figs. 3 and 4 for the case of the “canonical” mass and two different choices of  $\Lambda_U$ .

Analyzing the data for  $M = 1.36M_\odot$ ,  $d_U$ s fall in the range  $1.055 < d_U < 1.060$ . Therefore, this maximum mass yields a lower bound to  $M_*$  in the range  $(0.03\text{--}0.50)M_{Pl}$ . For  $M = 1.457M_\odot$ ,  $d_U$  lies in the range  $1 < d_U < 1.06$ , yielding a lower bound to  $M_*$  in the range  $(0.1\text{--}1.6)M_{Pl}$ . In the last case, with an assumed maximum mass  $M = 1.6M_\odot$  and the interaction range larger than the star radius, the only allowed values for

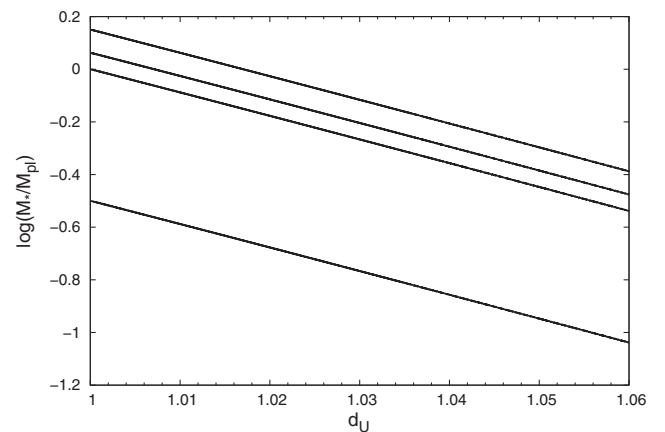


FIG. 4. Lower bounds on  $\log(M_*/M_{Pl})$ , for  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 2/3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 1.9$  from top to bottom respectively. The fixed values are  $\Lambda_U = 10^3$  TeV and  $M = 1.457M_\odot$ .

$d_U$ 's are in the range  $0.94 < d_U < 0.982$ , and lower bounds to  $M_*$  in the range  $(0.5-6.3)M_{Pl}$ .

#### IV. CONCLUSIONS

We have shown in this work that quite strong limits to the unparticle parameters can be obtained by using a simple form of the polytropic theory of Chandrasekhar adding a perturbation to the Lane-Emden equation, as first obtained by Bertolami, Páramos, and Santos [3], and applying it to the white dwarf sequences.

The key point elaborated here is that a change on the unparticle parameters would affect the maximum mass allowed to white dwarfs, and thereby we explored this characteristic in order to limit the values of such parameters.

The requirement that the maximum mass cannot be too small (because it would conflict with a few massive stars [7]) or too big (because it would lead to unobserved super-massive white dwarfs) limit the values of  $M_*$  to a confidence range of  $0.1M_{Pl} < M_* < 1.6M_{Pl}$  from this analysis alone for the case  $d_U \gtrsim 1$ . For the case  $d_U \lesssim 1$ , the mass-radius relation gives only masses bigger than the canonical

value. Considering that until today there is no observation of white dwarfs with such high masses, this analysis may be interpreted to mean that values of  $d_U < 1$  are not allowed.

Following a different approach, based on a cosmological scenario, Bertolami and Santos [8] considered the variation of the gravitational coupling at the time of big bang nucleosynthesis, tensor exchange, and the scaling dimension  $d_U = 1.1$ , and found  $M_*$  to be  $>0.05M_{Pl}$ , which is very close to the bounds found for  $1 < d_U < 1.06$ . Other works studying complementary bounds [3,9-13] could be combined to address the viability of a general unparticle model, unless one can manage to evade the bounds altogether. Even if so, a general argument to constrain the admissible perturbations to the Newtonian potential can be made *via* the perturbed Lane-Emden equation, resorting to the observed massive white dwarfs.

#### ACKNOWLEDGMENTS

We wish to acknowledge the CNPq and FAPESP Agencies for financial support.

- 
- [1] H. Georgi, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 22160198 (2007).
  - [2] H. Goldberg and P. Nath, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 031803 (2008).
  - [3] O. Bertolami, J. Páramos, and P. Santos, *Phys. Rev. D* **80**, 022001 (2009).
  - [4] S. Chandrasekhar, *Introduction to the Study of Stellar Structure* (Dover, New York, 1967), 3rd ed.
  - [5] D.A. Ostlie and B.W. Carrol, *Modern Stellar Astrophysics* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1996).
  - [6] L. Landau, *Collected Papers of L. D. Landau* (Pergamon, New York, 1965).
  - [7] S.O. Kepler, S.J. Kleinman, A. Nitta, D. Koester, B.G. Castanheira, O. Giovannini, A.F.M. Costa, and L. Althaus, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **375**, 1315 (2007).
  - [8] O. Bertolami and N.M.C. Santos, *Phys. Rev. D* **79**, 127702 (2009).
  - [9] H. Davoudiasl, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 141301 (2007).
  - [10] A. Freitas and D. Wyler, *J. High Energy Phys.* **12** (2007) 033.
  - [11] N. Deshpande, S. D. Hsu, and J. Jiang, *Phys. Lett. B* **659**, 888 (2008).
  - [12] J. R. Mureika, *Phys. Lett. B* **660**, 561 (2008).
  - [13] J. McDonald, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **03** (2009) 019.

*Statistical measure of complexity in compact stars with global charge neutrality.*

Contribuição no Compact Stars in the QCD Phase Diagram III (CSQCD III), Dezembro 2012.

# Statistical measure of complexity in compact stars with global charge neutrality

Rodrigo A de Souza <sup>1</sup>

Marcio G B de Avellar <sup>2</sup>

Jorge E Horvath <sup>3</sup>

*Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas*

*Universidade de São Paulo*

*05570-010 Cidade Universitária*

*São Paulo, SP*

*Brazil*

Email: [rodrigo.souza@usp.br](mailto:rodrigo.souza@usp.br) <sup>1</sup>

[marcavel@astro.iag.usp.br](mailto:marcavel@astro.iag.usp.br) <sup>2</sup>

[foton@astro.iag.usp.br](mailto:foton@astro.iag.usp.br) <sup>3</sup>

## 1 Introduction

In the past three decades, information theoretic methods have been applied to many different systems, from molecular biology to quantum mechanical systems, and even to linguistics. Specifically speaking about quantum systems, these methods can reveal the presence of interactions, correlations of experimentally measured quantities, universal relations and much more.

The basic concept of information theory is the Shannon Information, also known as Shannon Entropy or Information Entropy. But the question arises: what exactly is information? Information, in a general sense, is whatever we get about the occurrence of a given event: for example, how surprising or unexpected results. Shannon defined [1], in 1948, an expression that measures the information (or randomness, or uncertainty, or ignorance) about a system. Obeying a set of mathematical properties defined by him (and even if subject to a certain reductionism), the information content of a system in terms of probabilities of a event to occur is:

$$H = -K \sum_i p_i \log_b[p_i] \quad \text{or} \quad H = -K \int p(x) \log_b[p(x)] dx, \quad (1)$$

respectively for the discrete and continuous cases.

From this, people started thinking about how complex a system can be and how to measure this complexity calculating it from a mathematical definition. Thus, the statistical measure of complexity introduced by Lopez-Ruiz, Mancini and Calbet [2]

relates the complexity of a system to the information stored in it and the distance to a situation in which all possible states of the system are equiprobable. This definition encodes the concepts of order and disorder of a given arrangement of the system.

To illustrate these concepts we may think about two ideal systems frequently used in physics: the ideal gas and the perfect crystal, extremes in all aspects and opposites as well. Because they both are idealized systems, they should be thought as minimally complex systems. However, while the latter is totally ordered, the former is totally disordered; i.e. while for the perfect crystal one state is more probable than the others, in the ideal gas all states are equiprobable. Summarizing this intuitive view:

- Perfect crystal: This system has zero complexity by definition; its strict symmetry rules implies probability density centered around the prevailing state of perfect symmetry which result in minimal information. The system is completely ordered.
- Ideal gas: Ideal gases have also zero complexity by definition; Their accessible states are equiprobable resulting in maximal information. The system is totally disordered.

The intuitive behavior/relation among complexity, information entropy and disequilibrium is expected to be the one shown in Figure 1.

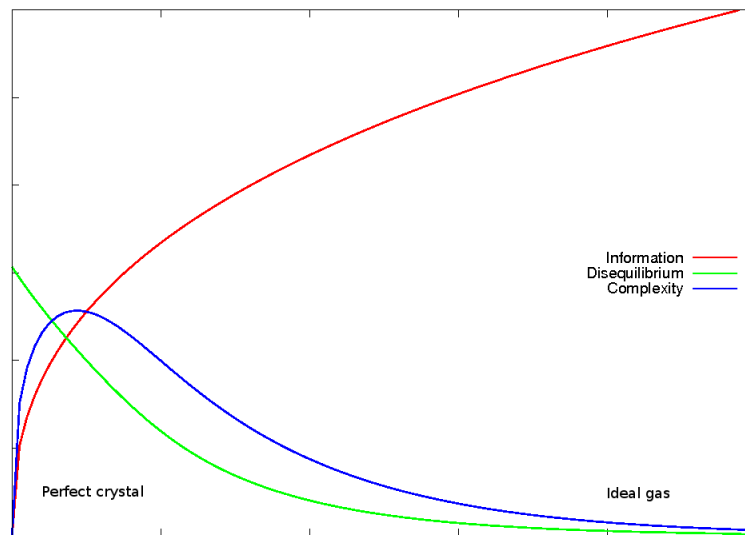


Figure 1: Intuition of what should be complexity, at least asymptotically.

At this stage an suitable expression for complexity arises:



$$C \equiv H \times D \quad \text{or} \quad C \equiv e^H \times D, \quad (2)$$

where

$$D = \sum_i \left[ p_i - \frac{1}{N} \right]^2 \quad \text{or} \quad D = \int p^2(x) dx$$

is the distance to the (equilibrium) equiprobability of states.

In this work, we used the measure of complexity given by  $C = e^H D$  to study the effect of the global charge neutrality developed by Rotondo et al [3] on neutron star structure following the work by de Avellar and Horvath [4] who compared the complexity of sequences of stars with different equations of state using the “standard” local charge neutrality.

The standard approach to the neutron star structure assumes the relativistic hydrostatic equilibrium condition and a (realistic) equation of state. Hidden in this scheme is, by construction, the assumption of local charge neutrality leading to no global electric field inside the star. However, recent theoretical developments [5] concluded that the insurgence of a critical electrical field during the gravitational collapse leads to the necessity of a full reexamination of the gravito-electrodynamical properties of neutron stars. If this is true, then one needs to consider an extension of the  $\beta$ -equilibrium condition consistently within, for example, a relativistic Thomas-Fermi equation, otherwise there could not be an equilibrium on microphysical scales.

Thus, when constructing the mathematical equations for the structure of these compact objects one needs to couple the relativistic Thomas-Fermi equation with the equilibrium condition governed by the Einstein-Maxwell equations.

In an extension of the work quoted in [3], Belvedere et al [6] included the strong interaction making the coupled set of equations even more difficult to solve analytically.

Here we intend to study first the effects of the global charge neutrality in the order of the system and then to study the effects of the inclusion of the strong interaction. Our study potentially leads to the construction of a hierarchy of equations of state to be realized in nature from the informational theoretic methods.

## 2 Results and Conclusions

Our results show the preliminary calculations for the two density profiles from reference [6] (Table 1). It seems that the global charge neutrality and the presence of strong interactions actually lower the disequilibrium of the star sequence in a way that the star tend to the ideal gas case in our intuition plot.

If our full calculations validate this results to the entire sequence of stars, we could have a direct measure of the effects of the global charge neutrality via information

Neutrality	$M[M_{\odot}]$	$R[km]$	$H[nats]$	$D$	$C$
$\rho_{crust} = 10^{10} g/cm^3$					
Global	2.0356	12.3386	-0.586	30.441	16.947
Local	2.2354	13.4787	-0.840	36.611	15.583
$\rho_{crust} = 4.3 \times 10^{11} g/cm^3$					
Global	1.8707	12.5156	-0.488	23.583	14.474
Local	1.9794	13.3375	-0.768	29.866	13.858

Table 1: Statistical measures of the information content, disequilibrium and complexity for two density profiles from ref. [6].

theoretic methods on the structure of neutron stars making these interactions and conditions more probable to be realized in nature.

### 3 Perspectives and further developments

Besides the total implementation of the code to solve the structure of neutron stars with local and global charge neutrality in order to study the information content of the different equations of state, we are developing the theory to further validate the use of the density profile as a probability-like distribution to be used in the calculation of the information content of a system, avoiding the “negative” information as done so far. In particular, we defined a new density profile satisfying two important features of probability functions:

1.  $p(x) \in [0:1] \forall x$ ,
2.  $\int p(x)dx = 1$ .

Using a exact density profile from a well-known exact solution of the Einstein equations we could match these conditions, yielding the results shown in Figure [?].

However, the consistency conditions alone are not enough. It is very necessary to understand better the meaning of what we want to calculate. The results for complexity shown in Figure 2 are at odds with the conclusion by de Avellar and Horvath [4] and by Chatzisavvas et al. [7], who stated that “neutron stars are ordered systems that cannot grow in complexity as its mass increases”. The reason behind this difference lies in the rate at which  $e^H$  increases or decreases relatively to the disequilibrium  $D$  and this, in turn, is related to the signal of  $H$ . Thus, further studies along these lines are required to characterize how these quantities behave for self-gravitating stars.

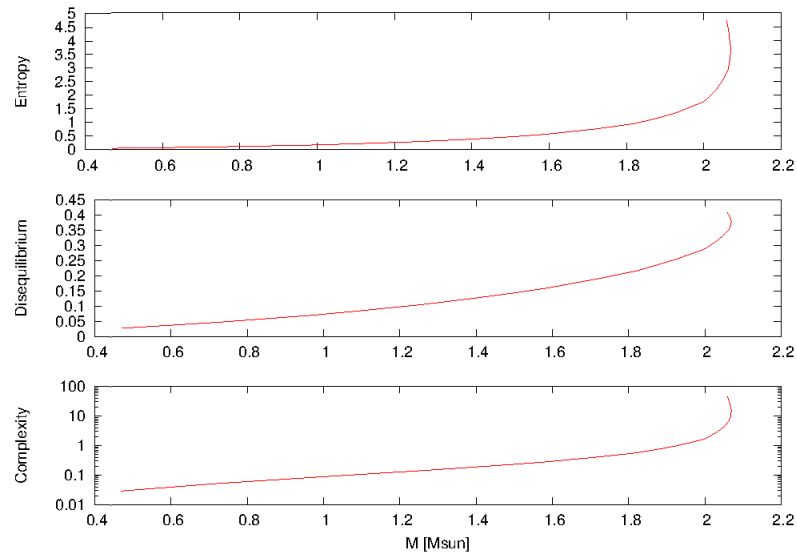


Figure 2: Information content, disequilibrium and complexity of the sequence of stars from the exact solution of the TOV equations taking into account anisotropy in pressure and MIT Bag Model equation of state [and local charge neutrality]

## References

- [1] Shannon, C. E., *Bell System Technical Journal*, 27, 379-424, 623-656, 1948.
- [2] López-Ruiz, R.; Mancini, H. L. and Calbet, X., *Physics Letters A*, 1995, 209, 321-326
- [3] Rotondo, M., Rueda, J. A., Ruffini, R., Xue, S.-S. *Physics Letters B*, 2011, 701, 667-771
- [4] de Avellar, M. G. B., Horvath, J. E., *Physics Letters A*, 2012, 376, 1085-1089
- [5] Ruffini, R., Vereshchagin, G. V., Xue, S.-S., *Physics Reports*, 2010, 487, 1-4, 1-140
- [6] Belvedere, R., Pugliese, D., Rueda, J. A., Ruffini, R., Xue, S.-S., *Nuclear Physics A* 2012, 883, 1-24
- [7] Chatzisavvas, K. Ch.; Psonis, V. P., Panos, C. P. and Moustakidis, Ch. C., *Physics Letters A* 2009, 373, 3901-3909

*Evolution of stellar entropy.*

Paper publicado na revista *Astronomische Nachrichten* 336(8-9), 2015.

# Evolution of stellar entropy

R. A. de Souza<sup>1,\*</sup>, M.G.B. de Avellar<sup>2</sup>, and J.E. Horvath<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas Universidade de São Paulo

<sup>2</sup> R. do Matão 1226, São Paulo, Brazil

Received 2015 Sep 21, accepted 2015 Sep 26

Published online 2015 Nov 20

**Key words** black hole physics – stars: evolution – stars: neutron – white dwarfs

An appraisal of the behavior of stellar entropy along stellar evolution is made. It is shown that the entropy per baryon of a star of a fixed baryon number decreases monotonically with increasing compactness of the star. The same entropy per baryon increases only whenever an irreversible collapse of the star happens. The recent proposals for a gravitational entropy related to curvature may justify the huge increase of the entropy in the ultimate collapse to a black hole.

© 2015 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

## 1 Introduction

Entropy is a celebrated concept started in the 19th century by Clausius and contemporaries (Müller 2007), later extended and reworked to link its content to information theory (Shannon & Weaver 1949), well beyond its pure original thermodynamic meaning. Entropy has played an important role in the classification and understanding of spontaneous physical processes, in particular, we shall be interested here in the stellar astrophysics case. Stars are basic structures bearing an entropy evolution which is the result of the combined action of microphysical and gravitational effects. In fact, it may be stated that the gravitational field is the main agent behind the microphysical changes in the state of matter, and the latter not only store different entropies but also drive entropy fluxes carrying away a fraction of the total entropy for a given stage.

The purpose of this work is to assess these entropy changes and sketch how entropy as a whole can be ultimately give an overview of the whole stellar evolution. One of the goals would be to show how the entropy per baryon *decreases* along the stellar evolution if objects with a fixed number of baryons are considered. Since many stellar stages lead to a change in the latter quantity (i.e. envelope ejection, etc.) it is quite difficult to keep track of all these changes for a single star. Instead, one should consider the fate of different stars that evolve into progressively more compact remnants of the same baryon number. Therefore, it is more convenient to compare initial and final states instead of calculating the temporal evolution of entropy, as discussed below. As a relevant related result, we shall construct a  $T$  vs.  $\rho$  diagram in which the dominant contribution of each of the stellar components dominates the balance.

## 2 Timescales and equilibria in stellar evolution

Stars are self-gravitating systems held by their internal pressure against collapse. The extremely long lifetime of stars is another form to state that they live almost all their lives in stationary states in which the virial equilibrium relation  $E_{\text{pot}} + 2E_{\text{kin}} = 0$  holds relating potential  $E_{\text{pot}}$  and kinetic  $E_{\text{kin}}$  energy. During most of their lives stars generate energy through nuclear reactions, first in its simplest version (hydrogen to helium conversion) or advanced ones (helium to carbon and beyond). A few time-scales describe how the structural, thermal, and energetic adjustments can be defined, namely

- $\tau_{\text{ff}} \sim \left(\frac{3}{8\pi G\rho}\right)^{1/2}$ , the free-fall time-scale, related to the velocity of propagation of perturbation;
- $\tau_{\text{th}} \sim \frac{R^2}{D_{\text{th}}}$  where  $D_{\text{th}}$  is the thermal diffusion coefficient (ratio of the conductivity to thermal capacity), is the time the star takes to establish a stationary distribution of the temperature when a small perturbation happens;
- $\tau_{\text{KH}} \sim \frac{GM^2}{RL}$ , the Kelvin-Helmholtz timescale, describes the time for the star to radiate of a significant fraction of its available energy;
- $\tau_{\text{nuc}} \sim \left(\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}\right)^{-1}$ , the time-scale for the burning of a given nuclear fuel with mass abundance  $X$ .

In stellar steady state,  $\tau_{\text{ff}} < \tau_{\text{th}} < \tau_{\text{KH}} < \tau_{\text{nuc}}$  is satisfied. Now, whenever a nuclear fuel is exhausted, the last inequality is violated, and the star seeks a new equilibrium state by contracting on a Kelvin-Helmholtz time-scale. Because of the high thermal content and the validity of the first inequality, this does *not* actually lead to a collapse. When the new steady state is achieved, gravity gets stronger, and ultimately drives changes in the state of matter inside (for instance, degeneracy of the electrons). We can generally state

\* Corresponding author: rsouza01@gmail.com

that entropy is produced but also radiated away (to the envelope and later, away from the star), while hydrostatic equilibrium is maintained. In the formation of a star, or late in the final true collapse (supernova stage), this entropy generation and radiation is even more marked, since the contraction is much less “gentle” and out-of-equilibrium, therefore irreversible processes play a major role.

Consider the second law of thermodynamics in its form for the system star + environment, namely

$$\frac{dS}{dt} = \Sigma - \oint \vec{J}_S d\vec{\Pi}.$$

While it is in principle possible in principle to keep track of all sources and sinks of entropy  $\Sigma$  inside the star and of the entropy currents  $\vec{J}_S$  throughout the boundary  $\Pi$ , this task suffers from several practical problems in practice. It is much simpler to calculate initial and final states to gauge the importance of the r.h.s. terms. Also, the luminosity equation for a stellar shell to evolve whenever there is a compression or expansion reads (in Lagrangian coordinates)

$$\frac{dL}{dm} = \epsilon - T \frac{dS}{dt},$$

with  $\epsilon$  the nuclear energy generation rate and  $S$  the entropy per mass unit (entropy loss by neutrinos has been neglected). We see that, if one turns off the term for nuclear energy generation, the virial theorem guarantees that the star will contract releasing part of its gravitational energy to compensate the decrease of the internal energy. However, even without “turning off” the source term, nuclear reactions slowly change the composition and the temperature gradients inside the star and the structure with it, leading it to a steady configuration as the star expands or contracts. Therefore, gravitational work is done on the stellar matter, and an exchange of heat between neighbouring shells occurs. Since stars evolve on a much slower time-scale than  $\tau_{KH}$ ,  $T dS/dt \approx 0$ , and the condition of local thermal equilibrium is always satisfied. A corollary of this discussion is that one can *not* compute the actual structure of a star without knowing its previous history (Clayton 1968) unless one makes quite strong assumptions on initial and boundary conditions. The term  $T dS/dt$  is therefore an important ingredient in the evolution because of these facts.

### 3 The entropy in different stellar stages

Stars form with a definite baryon number and produce a handful of compact stellar remnants of increasing compactness (white dwarfs, neutron stars, and black holes). We shall choose for our calculations to evaluate objects with a fixed  $N = 1.6 \times 10^{57}$  throughout this work. This choice is not arbitrary: It corresponds to a mass (for small binding energy) of  $\sim 1.35 M_{\odot}$ . It represents rather well a solar-type star while hydrogen burning happens, and even beyond, and it is very close to the transition mass between the high-mass

tail of the mass distribution of white dwarfs to the low-to-average mass tail of the mass distribution of neutron stars as well. We shall calculate the entropy of this baryon number star considering first the formation (molecular cloud stage), main sequence stage and a corresponding white dwarf, neutron star and black hole of the same baryon number. It is quite clear that there can be no such evolution of a single star, it is rather a hierarchy of stages coming from different stars that we are considering.

The basic assumptions for each stage are

- the total energy is  $E_{\text{tot}} = E_{\text{int}} + E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$ ;
- the virial condition  $E_{\text{pot}} = -2 E_{\text{kin}}$  is always satisfied;
- since the thermal timescale remains very short, the components achieve equilibrium particle distributions.

It is also assumed that the entropy is a function of the internal energy, the volume, and the particle number  $S = S(E_{\text{in}}, V, N)$ . The stages are then described as follows:

1. *Molecular cloud.* Substantial clumping within molecular clouds occur in stellar forming regions (Caproni, Abraham, & Vilas-Boas 2000). Formation of stars inside these clumps with typical temperatures  $\sim 20$  K, typical masses  $\sim 0.2 M_{\odot}$ , and densities  $\sim 10^5 \text{ cm}^{-3}$  coalesce and eventually merge to form a single star. The radius of each cloud is then  $R_{\text{SMC}} \approx 8.23 \times 10^{16} \text{ cm} \approx 0.03 \text{ pc}$ . The clumps are at this stage opaque to radiation, but their entropy is largely dominated by the ideal gas component (neglecting magnetic fields). Thus, the merging of a few clumps will produce a star with the assumed baryon content, in a complex process ultimately driving the star towards the zero-age main sequence (ZAMS), following the ignition of hydrogen and the establishment of the hydrostatic equilibrium condition. We note that the very merging could produce significant entropy not modelled here, therefore our numbers should be considered a lower limit.
2. *Main-sequence star.* We calculate the entropy evolution, dominated by the ideal gas component, using Townsend’s MADSTAR online tool<sup>1</sup>. We construct models burning hydrogen to helium featuring  $\approx 1.35 M_{\odot}$  or, equivalently, with  $1.6 \times 10^{57}$  baryons and solar metallicity. Four ages within the main sequence were calculated: a zero-age (corresponding to the ZAMS locus), 1 Gyr, 3 Gyr, and 4 Gyr. From each solved temperature profile and radius of each stage ( $T_0 \approx 9.53 \times 10^6 \text{ K}$ ,  $R_0 \approx 1.32 R_{\odot}$ ), ( $T_1 \approx 10.29 \times 10^6 \text{ K}$ ,  $R_1 \approx 1.45 R_{\odot}$ ), ( $T_3 \approx 10.85 \times 10^6 \text{ K}$ ,  $R_3 \approx 1.83 R_{\odot}$ ) and ( $T_4 \approx 16.48 \times 10^6 \text{ K}$ ,  $R_4 \approx 2.85 R_{\odot}$ ) we perform an average and calculate the entropy. Note that this crude procedure can contain differences of small factors  $\sim 2$ – $3$ , but are still representative of the actual value of the entropy.
3. *White dwarf.* After achieving the Schönberg-Chandrasekhar condition (Schönberg & Chandrasekhar 1942) hydrogen can no longer burn in the star, and the core contracts under its own gravity maintaining hydrostatic

<sup>1</sup> <http://www.astro.wisc.edu/~townsend/>

equilibrium. This is the end of the main sequence stage and the star moves out of it. For a low-mass star like the one we are dealing with, the contraction of the core proceeds until it is eventually halted by the degeneracy pressure of the electron gas, while the conservation of energy plus the virial relation together force the envelope to expand. After a series of structural changes, including the ignition of helium under degenerate conditions in the core (helium flash), the star will eject the outer envelope in a series of thermal pulses of increasing amplitude. Mass loss at this stage is very large and can not be ignored, therefore to hold the baryon number fixed as before we are not considering the actual evolutionary path but rather an ideal model situation for the sake of clarity. This is the end point of the evolution of this star because the remnant cannot generate energy. It will cool down releasing all the thermal energy it had stored.

It is widely accepted that the actual composition of a “typical” white dwarf is mainly a mixture of carbon and oxygen (or slightly heavier if the initial mass is higher), although to conserve the baryon number we had to assume the creation of a very heavy white dwarf with  $\approx 1.35 M_{\odot}$ . In order to calculate the structure of such a star, we assumed the ultra-relativistic regime with a polytrope of index  $n \sim 3$ . This mass is quite near the Chandrasekhar limiting mass. The equation of state is then given by  $P = K\rho^{4/3}$ . The assumed central density is  $1 \times 10^{10} \text{ g cm}^{-3}$ , from which  $R_{\text{WD}} \approx 0.002 R_{\odot}$  ( $\sim 1500 \text{ km}$ ) is obtained.

We calculated the entropy of the WD in two specific moments: the hot initial phase, after the thermal pulses, where the core temperature is  $T_{\text{HWD}} \sim 5 \times 10^8 \text{ K}$  and for a very late and evolved phase, when the core temperature is  $T_{\text{CWD}} \sim 1 \times 10^5 \text{ K}$ .

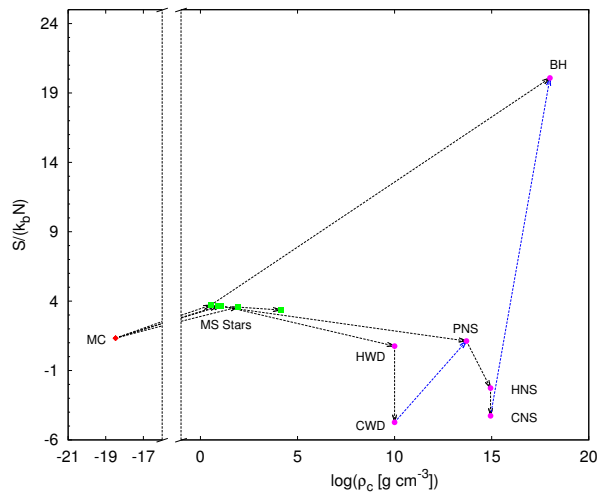
4. *Neutron star.* The next stage of compactness in stellar evolution is the formation of a neutron star. Neutron stars in nature are formed by the collapse of a massive star  $8\text{--}25 M_{\odot}$ , or even more, resulting in a compact object of  $\geq 1.2 M_{\odot}$  and  $R \sim 10 \text{ km}$ . Another possible way to form a neutron star is via the accretion-induced collapse of a white dwarf (van den Heuvel 2011). In our discussion, we envisage a compression ( $PdV$ ) from the outside at fixed baryon number, forcing the collapse to the denser neutron star state through electron capture.

We calculated the entropy in three distinct moments: the hot proto-neutron star phase whose temperature was assumed to be  $T \sim 5 \times 10^{11} \text{ K}$  and  $R_{\text{PNS}} \sim 55.75 \text{ km}$  (this is about five times the radius of the forthcoming neutron star, due entirely to the “hot phase”); a later “stationary” phase with temperature of  $T = 1 \times 10^9 \text{ K}$  and  $R_{\text{NS}} \approx 11.15 \text{ km}$ , which settles a few hours after the formation at most; and a final cold “stationary” phase with temperature of  $T = 1 \times 10^7 \text{ K}$  and  $R_{\text{NS}} \approx 11.15 \text{ km}$  representing the cooling of the isolated neutron star after  $\sim 10^6 \text{ yr}$ , approximately.

5. *Black hole.* We end our calculations with the ultimate state of collapsed matter, the black hole. The actual formation of this extreme compact object is marked by the death of a very massive star ( $\geq 25 M_{\odot}$ ). Here we imagine the collapse of the  $1.6 \times 10^{57}$  baryons altogether, much in the same way as the previous discussion we hold the same baryon number fixed, and just assume that the formation of a black hole has occurred by the action of some external mechanism compressing matter inside its Schwarzschild radius. After the formation of the event horizon, the final object emits thermal radiation at a Hawking temperature  $T_{\text{BH}} = \frac{hc^3}{2k_b\pi G(Nm_u)} \approx 1.8 \times 10^{-7} \text{ K}$ . The celebrated proportionality between the entropy and the area (Bekenstein 1973, 1974) now applies, since all forms of matter have disappeared beyond the horizon.

We show in Table 1 the dominant entropy contribution inside each compact object with a fixed number  $1.6 \times 10^{57}$  baryons indicating how entropy is stored in the final configurations at different states of matter, and the evolutionary path of the stars through their lives. Graphically, we display in Fig. 1 the thermodynamic entropy *per baryon* in units of  $k_b$  as a function of the central density at each stage of the evolution (notice that for a black hole we assumed an effective average central density of  $10^{18} \text{ g cm}^{-3}$ ).

An important comparison can be between the progenitor main sequence stars of  $7 M_{\odot}$ ,  $11 M_{\odot}$ , and  $25 M_{\odot}$ , and the “initial” (hot) final configurations hot white dwarf, hot



**Fig. 1** Entropy *per baryon* in units of  $k_b$  vs. central density of the objects in each stage of evolution. The diamonds are the four molecular clouds; the squares are the four main sequence stars (note that there are five squares, but one of them represents an evolved version of the same  $1.35 M_{\odot}$  star); and the circles represent the compact stars (white dwarf, neutron star, and black hole plus the protoneutron star). The arrows show the changes (evolution) of the entropy as stellar evolution proceeds. The two arrows going from the cold white dwarf to the protoneutron star and from the cold neutron star to the black hole correspond to the special case of externally induced collapse.

**Table 1** Entropy components [erg K<sup>-1</sup>] of each compact object with  $1.6 \times 10^{57}$  baryons in the stages of a molecular cloud (MC), main sequence with different masses (star(i), see text), white dwarf (WD), proto-neutron star (PNS), neutron star (NS), and black hole (BH).

	Radiation	Ideal Baryons	Ideal Electrons	Degenerate Electrons
HWD	$\sim 10^{37}$	$\sim 10^{42}$	–	$\sim 10^{40}$
CWD	$\sim 10^{26}$	–	–	$\sim 10^{36}$
PNS	$\sim 10^{42}$	$\sim 10^{42}$	–	$\sim 10^{42}$
HNS	$\sim 10^{32}$	–	–	–
CNS	$\sim 10^{26}$	–	–	–
BH	$\sim 10^{-17}$	–	–	–

	Crystal	Degenerate Neutrons	Area
HWD	–	–	–
CWD	$\sim 10^{33}$	–	–
PNS	–	–	–
HNS	–	$\sim 10^{39}$	–
CNS	–	$\sim 10^{37}$	–
BH	–	–	$\sim 10^{61}$

neutron star (passing through the proto-neutron star phase), and black hole. We clearly see a trend to *lower* the entropy per baryon from earlier stages until the final configurations. It is also worth noting that looking at the  $7 M_{\odot}$  and  $11 M_{\odot}$  main-sequence stars, the entropy jump to a state of lower entropy is higher from the star of  $11 M_{\odot}$  to the neutron star than from the star of  $7 M_{\odot}$  to the white dwarf. Thus, for the same number of baryons, the more compact object has the lower entropy, and this difference is due to the structural changes of matter, from ordinary matter in white dwarfs to very neutron-rich matter in neutron stars. The entropy of the protoneutron star is in fact very similar to the entropy of the hot white dwarf, since in general terms, the protoneutron stars is a kind of iron white dwarf, with matter in a state that resembles the state of white dwarf.

Gravity is the ultimate force driving the entropy changes and stellar evolution. Then one can wonder why the most compact object, the black hole, has a entropy that is so many orders of magnitude higher than the other compact objects with the same number of baryons, apparently contradicting the very conclusion we stated in the previous paragraph. The answer may be linked to the gravity field itself and its putative entropy content. We shall see below that the latter could nicely explain the big difference of the entropy content between low and high curvature stars.

Sofar we have considered the entropy content of stellar stages, but it is also important to point out how the entropy behaves in different regions of the same star, namely of a massive  $> 8 M_{\odot}$  object along its evolution. The convection is known to play an increasingly important role in the cores of massive stars if progressively larger masses are considered. Whenever convection is active, the entropy distribution is flat for the same reason as for the temperature.

Now, the virial relation (satisfied at all stationary states of the star) states that, in equilibrium, the gravitational and thermal energies satisfy  $\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} = 2 \frac{3}{2} NkT = 3 \frac{M}{\mu m_H} kT$ , where  $N$  is the total number of particles,  $\mu$  is the mean molecular weight of the gas, and  $m_H$  is the hydrogen mass. For an idealized constant value of the density, a simple manipulation of the former relation yields  $T \sim \frac{G\mu m_H}{k} M^{2/3} \rho^{1/3}$ . In such a case, the expression of the ideal gas shows that the entropy *decreases* with *increasing* temperature, in complete agreement with the second law of thermodynamics *when subject* to the virial equilibrium condition. It is sometimes said that the star “digs an entropy hole” along its evolutionary path by transferring entropy to the envelope, but this behavior ceases as long as some other component (i.e. the degenerate electrons) dominates the entropy balance.

## 4 Conclusions

We have discussed how the increasing gravitational compactification of stellar matter makes the thermodynamic entropy of matter to *decrease* from the main sequence stages to their correspondent compact end states in an ordered, monotonic sequence. This decrease of the thermodynamic entropy of matter is not in contradiction with the second law of thermodynamics since the gravitational contraction releases high-entropy radiation (and neutrinos) to the envelope and beyond which more than compensates the decrease of the entropy of the object. Thus, it is the ability to radiate away entropy what keeps the entropy of stars of a fixed baryon number decreasing. In other words, the entropy decrease of matter with the gravitational contraction happens at the expense of an increase in the entropy of the immediate environment due to the release of very high-entropy radiation/neutrinos during the life of stars on the main sequence and beyond, in addition to the change of the state of matter induced by the compression.

It was stated above that gravity plays a major role in all these stages and entropy changes, driving stellar evolution towards its end. Gravity is responsible, again, for the formation of a black hole. As seen above, collapse under gravity causes entropy to increase enormously; however, here the black hole itself “cools down” to a very low Hawking temperature (for a solar-mass or so black hole), much smaller than the external temperature while its entropy increases astonishingly. Because black holes have negative heat capacity, they absorb radiation faster than they can emit by the Hawking mechanism. We face a very special case: the environment is *cooled* by the collapse (differently than in normal stars) while the entropy of the matter in the black hole becomes very high (Wallace 2010).

A solution of this puzzle may be that the gravitational field itself carries and stores entropy. This entropy has been tentatively related to the curvature inside the stars, hence it is negligible for Newtonian objects like the molecular clouds, main sequence stars, and white dwarfs. For a neutron star, constructed under the framework of General Relativity,



tivity, the entropy of gravity is expected to comprise a larger fraction of the total, but still does not alter significantly the entropy budget of this very compact star.

However, things change considerably when a massive main sequence star collapses to form a black hole. Black holes are, in turn, “pure gravity”, in which the curvature term goes to infinity. If curvature is a proxy for the gravitational field entropy, that is why this collapse actually *increases* the entropy stored in this object. A definite recent suggestion for the entropy of the gravitational field has been published by Clifton, Ellis, & Tavakol (2013) based on the Bel-Robinson tensor which makes use of the Weyl part of the curvature tensor  $C_{abcd}$  (see Sussman & Larena 2014, for applications). Thus, an increasing entropy to the gravitation related to the increasing curvature value results. It is also important that in this particular proposal, the gravitational entropy reduces to the Bekenstein-Hawking value in the case of a Schwarzschild black hole. Therefore, the origin of the black hole’s huge entropy could be thought as the limiting case of the action of gravity in stars. not only by forcing the change of state of the matter (as discussed above), but also leading to the highest available value found in nature.

We have seen in this work that entropy in its various forms plays an important role in stellar evolution theory. We discussed how the gravitational contraction, although irreversible in nature, *lowers* the entropy of matter relatively to its former state. However, we still have a long journey towards complete understanding of the role of entropy in the fate of stars. We conjecture, however, that there is an ample synthesis yet to be made from the study of entropy in stars from a totally general point of view.

*Acknowledgements.* We acknowledge the financial support received from the Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo. J.E.H. wishes to acknowledge the CNPq Agency (Brazil) for partial financial support.

## References

- Bekenstein, J. D. 1973, Phys. Rev. D, 7, 2333  
 Bekenstein, J. D. 1974, Phys. Rev. D, 9, 3292  
 Caproni, A., Abraham, Z., & Vilas-Boas, J. W. S. 2000, A&A, 361, 685  
 Clayton, D. D. 1968, Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis, (New York: McGraw-Hill)  
 Clifton, T., Ellis, G.F., & Tavakol, R. 2013, Class. Quant. Grav., 30, 125009  
 Müller, I. 2007, A History of Thermodynamics, the Doctrine of Energy and Entropy, (Springer Verlag: Heidelberg)  
 Schönberg, M., & Chandrasekhar, S. 1942, ApJ, 96, 161.  
 Shannon, C. E., & Weaver, W. 1949, The Mathematical Theory of Communication, (Urbana: University of Illinois Press)  
 Sussman, R. A., & Larena, J. 2014, Class. Quant. Grav., 30, 075021  
 van den Heuvel, E. P. J. 2011, Bull. Astron. Soc. of India, 39, 1  
 Wallace, D. 2010, British Jour. Phil. Sci., 61, 513

*Trends of stellar entropy along stellar evolution.*

Paper publicado online no Research in Astronomy and Astrophysics (RAA), Vol.16, 2, 2016 .

## Trends of stellar entropy along stellar evolution

Marcio G. B. de Avellar<sup>1</sup>, Rodrigo A. Souza<sup>1</sup> and J. E. Horvath<sup>1</sup>

Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas - Universidade de São Paulo, Rua do Matão, 1226, 05508-900, Cidade Universitária, São Paulo SP, Brazil; [mgb.avellar@iag.usp.br](mailto:mgb.avellar@iag.usp.br) and [rodrigo.souza@usp.br](mailto:rodrigo.souza@usp.br) and [foton@iag.usp.br](mailto:foton@iag.usp.br) (JEH)

Received 2012 June 12; accepted 2012 July 27

**Abstract** This paper is devoted to discuss the difference in the thermodynamic entropy budget *per baryon* in each type of stellar object found in Universe. We track and discuss the actual *decrease* of the stored baryonic thermodynamic entropy from the most primitive molecular cloud up to the final fate of matter in the black holes, passing through evolved states of matter as found in white dwarfs and neutron stars. We then discuss the case of actual stars of different masses throughout their *evolution*, clarifying the role of virial equilibrium condition for the decrease of the entropy and related issues. Finally, we discuss how gravity ultimately drives composition, hence structural changes along the stellar evolution all the way until the ultimate collapse to black holes, which may increase dramatically their entropy because of the gravitational contribution itself.

**Key words:** stars: formation — stars: neutron — black holes

### 1 INTRODUCTION

Entropy, as defined by physicists, is a mathematical function that encodes the thermodynamic macro-state of a physical system constructed from the statistical description of that system, thus a thermodynamic potential from which all the physical quantities may be computed. The classical works of Gibbs and Boltzmann (see a review by Müller 2007) clarified the meaning of entropy and suggested that it is also related to the degree of disorder of a system, although only in a very restricted sense, then mainly related to the heat capacity analogies with solids, liquids and gases<sup>1</sup>. Entropy drives the thermodynamic evolution of a system in time; and it is related to the amount of energy, including heat, that is available to do work according to Clausius and other contemporaries (Müller 2007). See also a discussion about the minimization of energy and the maximization of entropy and the relation to the available free energy in Müller (2008).

It is often stated that entropy plays a key role in any process in Universe, and by means of its study that we can achieve a better understanding of the fate of the Universe and its contents. The Universe contains several differentiated structures from the largest to the smallest scales, and it is precisely among the latter that we are going to study the relations of entropy in various evolutionary states of the most fundamental astrophysical objects in Nature: stars, beginning with molecular clouds all the way down to the (ultimate) formation of black holes. The features of the thermodynamic entropy of a star along its main evolutionary phases will be addressed in Section 2. We present and discuss the results of entropy calculations in Section 3. We conclude in Section 4 by discussing how the whole stellar evolution is seen from the point of view of entropy considerations.

---

<sup>1</sup> Metals have lower heat capacities and lower entropies than liquids. At the same time, metals have less ways to spread out some injected energy through their internal structures which makes them more orderly than liquids.

## 2 BASIC HYPOTHESES AND MODELS

Stars are essentially self-gravitating systems held by some internal pressure against collapse. The stability of stars is due to the fact that they spend almost all their lives in stationary states, in which the virial equilibrium relation  $E_{pot} + 2E_{kin} = 0$  among the various forms of potential  $E_{pot}$  and kinetic  $E_{kin}$  energy terms hold. During most of their “active” lives stars generate energy through nuclear reactions, either in its simplest form (hydrogen to helium conversion) or advanced versions (helium to carbon and beyond). A set of time-scales describing how the structural, thermal and energetic adjustments are made can be defined, including

- $\tau_{ff} \sim \left(\frac{3}{8\pi G\bar{\rho}}\right)^{1/2}$  is the free-fall time-scale, an upper limit to the maximum velocity of propagation of any perturbation;
- $\tau_{th} \sim \frac{R^2}{D_{th}}$  where  $D_{th}$  is the thermal diffusion coefficient (ratio of the conductivity to thermal capacity), characterizing the time the star takes to establish a stationary distribution of the temperature when the latter is perturbed;
- $\tau_{KH} \sim \frac{GM^2}{RL}$  is the Kelvin-Helmholtz time-scale, related to the time it takes for the star to radiate of a significant fraction of the available energy;
- $\tau_{nuc} \sim \left(\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}\right)^{-1}$  related to the burning of a given nuclear fuel with mass abundance  $X$ .

Stars in steady state satisfy  $\tau_{ff} < \tau_{th} < \tau_{KH} < \tau_{nuc}$ . Whenever a nuclear fuel is exhausted, the last inequality is violated, and the star seeks a new equilibrium state by contracting on a Kelvin-Helmholtz time-scale. Note that, because of the high thermal content and the first inequality, this is *not* actually a collapse. However, in each of the stages gravity gets stronger, and ultimately drives changes in the state of matter inside (i.e. degeneracy). Therefore, we can state that entropy should be produced but also radiated away (to the envelope and later away from the star), while hydrostatic equilibrium is maintained. In the formation of a star, or late in the final true collapse (supernova stage), this entropy generation and radiation is even more marked, since the contraction is much less “gentle” and out-of-equilibrium, therefore irreversible processes play a major role.

We are thus lead to consider the Second Law of Thermodynamics in a familiar form for the system star + environment, namely the equation 1

$$\frac{dS}{dt} = \Sigma - \oint \vec{J}_S d\vec{\Pi} \quad (1)$$

In principle, tracking all the sources of entropy inside the star ( $\Sigma$ ) and the flux of the entropy currents  $\vec{J}_S$  throughout the boundary  $\Pi$  we could calculate the increase or decrease of entropy for each stage of evolution of a given star of a given mass. Instead of that, one can just calculate initial and final states, thus “weighting” the relative importance of both terms on the right hand side of the above equation. Note that there could be ejection of mass (and entropy with it) in some explosive stages, although we shall not discuss the details of this complication in the remaining of the discussion, since we will compare just the entropy content in the final configurations of the objects under study (these final configurations will have the same number of baryons, for the reasons explained later). Besides, as we shall see later in Figure 1, a considerable amount of entropy is lost with the processes that lead to the explosive stages. In addition, the luminosity equation for a differential shell to evolve whenever there is a compression or expansion reads (in Lagrangian coordinates)

$$\frac{dL}{dm} = \epsilon - T \frac{dS}{dt} \quad (2)$$

with  $\epsilon$  the nuclear energy generation rate and  $S$  the entropy per mass unit and we have neglected the energy loss in the form of neutrinos. As we see, there could be luminosity generation even without

nuclear reactions, provided there is enough temporal variation of the enclosed entropy. Processes like ionization driven by compression, for example, contribute to the second term in some stages in between steady burning stages. The second term of Equation 2, also known as the thermal term, is more important for giant branch stars, not discussed here.

A couple of comments are necessary regarding the above equation since it bears a very important meaning when one has to compute the structure of a star. If one turns off the term for nuclear energy generation, the virial theorem guarantees that the star will contract somewhat releasing part of its gravitational energy to compensate the decrease of its internal energy. However, even if one does not “turn off” the source term, nuclear reactions slowly change the composition and the temperature gradients inside the star and then the structure, leading it to a new gravitational configuration as the star expands or contracts (depending on the internal energy balance).

These gravitational adjustments imply that a gravitational work is done on the stellar matter which, in turn (due to the energy sources) drives an exchange of heat between adjacent shells of stellar matter. In this way, the above equation is a direct consequence of the principle of conservation of energy:  $dQ/dt = dU/dt + PdV/dt$ . Thus, the change of entropy with time is a consequence of the very process of evolution of the star, i.e., the attempt of gravity to sustain the star in a state of (quasi) hydrostatic equilibrium, a heat-exchange process among matter shells (that is why some authors call this term, not very precisely, the “gravitational energy source”). Therefore, this term is related to  $\tau_{KH}$ , and since the stars evolve on a much slower time-scale than  $\tau_{KH}$ , except for the star on the Hertzsprung gap,  $TdS/dt \simeq 0$  and the condition of (local) thermal equilibrium is satisfied. Any complete and realistic model including transient adjustments must take into account the  $TdS/dt$  term. However, when computing the structure of a star we realize that we have to make some assumptions about the initial and boundary conditions and, in the case of a collapsing or expanding phase, the models may depend on these conditions, sometimes quite strongly. Here we meet the real physical meaning of the equation just described: one cannot compute the structure of a star without knowing its previous history as stated in Clayton (1968).

As a matter of fact, it should be remembered that the above eq. 2 does *not* determine the luminosity of a star as seen by a distant observer. That equation is prescription of what the luminosity should be in order to maintain the energy balance, e.g., the nuclear fusion and gravitational adjustments balance the energy losses, and is valid in any differential shell inside the star. The energy outflow from the star is ultimately determined by the radiation transport mechanisms such as diffusion, convection and conduction, all dependent on the shape and value of the temperature gradient, to be determined as a solution of the full set of structure equations.

After all these considerations we shall, in order to be able of compare the different evolutionary phases of our model stars, first set a conserved quantity. The baryon number is precisely tailored for such a purpose, and we shall fix it to the value  $N = 1.61 \times 10^{57}$  throughout this work, unless explicitly stated. This is not an arbitrary choice: the number corresponds to a mass (for small binding energy) of about  $\sim 1.35 M_{\odot}$ . It corresponds rather well to a solar-type example while hydrogen burning is considered, and even beyond, and is very close to the critical transition mass between the “evolutionary phases” from the high-mass tail of the mass distribution of white dwarfs to the low-to-average mass tail of the mass distribution of neutron stars as well.

Our program to discuss the whole changes of the entropy will be the following: taking into account that a star will end up as one of the three kinds of compact objects (a white dwarf, a neutron star or a black hole),<sup>2</sup> we set these final configurations as having the the same number of baryons (our conserved quantity),  $N = 1.61 \times 10^{57}$ , and we calculate the thermodynamic entropy of each compact object. After that we track back what would be the progenitor of each of our compact objects, e.g., what is the mass of the main sequence star that produced the compact objects with  $1.61 \times 10^{57}$  baryons. We calculate the entropy of these stars in some chosen epoch of their lives during the Main Sequence. And then, we track back the entropy of the primordial clouds that produced these stars in the main sequence.

---

<sup>2</sup> Because the fate of a star depends on the mass it has at the moment it enters in the main sequence, the progenitors of the compact objects must have different initial masses. Roughly, a white dwarf has a progenitor with  $1 - 7.5 M_{\odot}$ , a neutron star has progenitor with  $8 - 25 M_{\odot}$  and a black hole has progenitor with  $\geq 25 M_{\odot}$ .

Our assumptions on the stellar state at each stage are:

- the total energy is given by  $E_{tot} = E_{int} + E_{kin} + E_{pot}$ ;
- the virial condition  $E_{pot} = -2 \times E_{kin}$  is satisfied;
- the components have equilibrium particle distributions, for example, equipartition of energy holds for ideal gases,  $E_{kin} \sim kT$ . This is a justified as long as the thermal timescale remains very short, as is usually the case.

In general, the entropy is a function of the (internal) energy, the volume and the number of particles of a system:  $S = S(E_{in}, V, N)$ . Thus, we must properly choose the physical models that yield the energy and volume in each stage for a fixed number of baryons. The evolutionary stages we will discuss are:

1. **White dwarf:** White dwarfs are the endpoint of the evolution of ordinary stars with  $\sim 1$  to  $\sim 7 M_{\odot}$ . From the point of view of stellar evolution, things depart considerably from the previous stages of the lives of ordinary stars. At this stage hydrogen can no longer burn in the star and the core contracts under its own gravity after achieving the Schönberg-Chandrasekhar condition ([Schönberg & Chandrasekhar 1942](#)) changing the hydrostatic equilibrium. This is the end of the Main Sequence stage (see below) and the star moves out of it entering into a completely new path in the H-R diagram. For a low- to intermediate mass star like the one we are dealing with, the contraction of the core proceeds until the point it is eventually halted by the degeneracy pressure of the electron gas, while the conservation of energy plus the virial relation together force the envelope to expand. After a series of structural changes, including the ignition of helium in degenerate conditions in the core (helium flash), the star will eject the outer envelope in a series of thermal pulses of increasing amplitude. Mass loss at this stage is very large and can not be ignored, therefore to hold the baryon number fixed as before we are not considering the actual evolutionary path but rather an ideal model situation for the sake of clarity. This is the end point of the evolution of this star because the remnant cannot generate energy. It will cool down releasing all the thermal energy it had stored. It is widely known that the actual composition of a “typical” white dwarf is mainly carbon-oxygen (C-O) and they have typical masses of about  $0.6 M_{\odot}$ . However, in order to conserve the baryon number of  $1.6 \times 10^{57}$  we had to assume the creation of a very heavy white dwarf with  $\simeq 1.35 M_{\odot}$  well to the tail of the mass distributions of these stars. The composition is then different: it is probably oxygen-magnesium-neon (O-Mg-Ne) white dwarf. To produce such a heavy white dwarf, the progenitor star was chosen to have mass of  $7 M_{\odot}$ , roughly  $8.3 \times 10^{57}$  baryons, which lose  $6.7 \times 10^{57}$  baryons during the mass loss phase, which is a reasonable assumption. Thus, in order to calculate the structure of this star we assumed the ultra-relativistic regime with a polytrope of index  $n \sim 3$ , since the mass of this object is quite near the Chandrasekhar limiting mass ([Chandrasekhar 1931](#)). The equation of state is then given by  $P = K\rho^{4/3}$ . The assumed central density is  $1 \times 10^{10} g/cm^3$  from which  $R_{WD} \simeq 0.002 R_{\odot}$  ( $\sim 1500 km$ ) is obtained. We calculated the entropy of the WD in two specific moments: the hot initial phase, after the thermal pulses, where the core temperature is  $T_{HWD} \sim 5 \times 10^8 K$  and for a very late and evolved phase, when the core temperature is  $T_{CWD} \sim 1 \times 10^5 K$ .
2. **Neutron star:** Neutron stars are formed by the collapse of a massive star  $8 - 25 M_{\odot}$  resulting in a compact object of  $\geq 1.2 M_{\odot}$  and  $R \sim 10 km^3$ . Neutron stars are supposed to have all the same composition since the burning stages of the evolution reach the limit of the iron, from where no more exothermic processes are possible. So, with iron as the starting point for further evolution, the core contracts to a completely new phase of (dense) matter. Neutrons stars also have a mass distribution, possibly two peaked ([Valentim et al. 2011](#)), and the different masses are possibly due to the masses of the progenitor stars and the mass loss processes during earlier stages of evolution during the post main sequence phase. Thus, in order to produce a neutron star with  $1.6 \times 10^{57}$  baryons, near to the lighter part of the mass distribution, we assumed

---

<sup>3</sup> Another possible way to form a neutron star is via the accretion-induced collapse of a white dwarf ([van den Heuvel 2011](#)).

a progenitor with  $11 M_{\odot}$  that lose something about  $11.5 \times 10^{57}$  baryons in the ultimate supernova explosion.

We calculated the entropy of our neutron star in three distinct moments: the hot proto-neutron star phase whose temperature was assumed to be  $T \sim 5 \times 10^{11} K$  and  $R_{PNS} \sim 55.75 km$  (this is about five times the radius of the forthcoming neutron star, due entirely to the “hot phase”); a later “stationary” hot phase with temperature of  $T = 1 \times 10^9 K$  and  $R_{NS} \simeq 11.15 km$ , which settles a few hours after the formation at most; and a final cold “stationary” phase with temperature of  $T = 1 \times 10^7 K$  and  $R_{NS} \simeq 11.15 km$  representing the cooling of the isolated neutron star after  $\sim 10^6 yr$  approximately.

3. **Black hole:** We end our calculations with the ultimate state of the collapsed matter, the black hole. The actual formation of this extreme compact object is marked by the death of a very massive star ( $\geq 25 M_{\odot}$ ). In a similar way as with the neutron star formation, we assumed a progenitor with  $25 M_{\odot}$  that, after its normal evolution, ejects  $28.1 \times 10^{57}$  baryons ending with the formation of a  $1.6 \times 10^{57}$  baryons black hole. After the formation of the event horizon, the final object emits thermal radiation at a Hawking temperature  $T_{BH} = \frac{\hbar c^3}{2k_b \pi G(N m_u)} \simeq 1.8 \times 10^{-7} K$ . The celebrated proportionality between the entropy and the area (Bekenstein 1973, 1974) now applies, since all forms of matter have disappeared beyond the horizon.
4. **Main sequence star:** We follow the entropy evolution, dominated by the ideal gas component, using Townsend’s MadStar online tool (<http://www.astro.wisc.edu/~townsend/>) to create ordinary main sequence star models, burning hydrogen to helium and solar metallicity. We created four main sequence stars: one with  $1.35 M_{\odot}$  that will evolve in some 4 billions of years into an old ordinary star (it will evolve further to a C-O white dwarf that we will NOT study here); one with  $7 M_{\odot}$  that will evolve in some hundreds of millions of years to a O-Mg-Ne white dwarf; one with  $11 M_{\odot}$  that will evolve in some dozens of millions of years to a neutron star; and one with  $25 M_{\odot}$  that will evolve in some hundreds of thousands of years to a black hole. The MadStar is a online tool based upon an approach by Bill Paxton on the famous Eggleton code. Although some limitations exist, none of them have strong influence to our purposes.
5. **Molecular cloud:** Modern determinations of stellar forming conditions (Caproni et al. 2000) have shown the occurrence of substantial clumping within molecular clouds. We consider the formation of stars inside these clumps which have typical temperatures  $\sim 20 K$ , typical masses  $\sim 0.2 M_{\odot}$  and typical densities  $\sim 10^5 cm^{-3}$  that merge together to form a single star. The radius of each small cloud is then  $R_{SMC} \simeq 8.23 \times 10^{16} cm \simeq 0.03 pc$ . Thus, each small cloud amounts to  $1.19 \times 10^{56}$  baryons. The clumps at the immediate stage of star formation are opaque to radiation, but their entropy is largely dominated by the ideal gas component (we neglect magnetic fields in this discussion). The merging of a few of these small clumps will produce a star with the assumed baryon content, in a complex process driving the star towards the Zero-Age Main Sequence (ZAMS) immediately following the ignition of hydrogen and the establishment of the hydrostatic equilibrium condition.

Recalling, we want to study, at the same time, the thermodynamic entropy of a given  $1.6 \times 10^{57}$  baryons in different states of matter, i.e., in different degrees of compactification and the changes of the entropy content along the the evolution of the objects that originated these final compacted baryons in the first place. As mentioned above, we have three compact stars representing three different exotic states of matter. We need then four original molecular clouds: three for the three compact stars and another one to account for  $1.6 \times 10^{57}$  baryons enclosed in a ordinary star in “normal” state.

Clumping of small molecular clouds add up to form four molecular clouds, with  $1.6 \times 10^{57}$  baryons,  $8.3 \times 10^{57}$  baryons,  $13.1 \times 10^{57}$  baryons and  $29.7 \times 10^{57}$  baryons, respectively, that will form the four main sequence stars that, in turn, will form our final four objects whose entropy will be studied.

It is important to check for each stage of evolution the state of degeneracy, since degenerate gases follow a different entropy expression than ideal gases. In Table 1 we give the Fermi temperature in each stage, remembering that the degeneracy occurs if  $T_{object} \ll T_F$ .

**Table 1** Fermi temperatures [K] of each evolutionary stage given by our hypotheses: molecular cloud (MC), ordinary Main Sequence (MS) star, white dwarf (WD), proto-neutron star (PNS), and neutron star (NS). It is important to notice that in the table below we calculated an average Fermi temperature employing the average density of each object. The Fermi temperature is given by  $T_F = \frac{1}{k_b} \frac{\hbar^2}{2m_u} \left(3\pi^2\eta\right)^{2/3}$ , where  $\eta = \frac{N}{V}$ , generally a function of the radial coordinate  $r$ .

	MC	Star0	Star1	Star3	Star4	WD	PNS	NS
$T_{Fe^-}$	$\sim 10^{-7}$	$\sim 10^9$	$\sim 10^9$	$\sim 10^9$	$\sim 5 \times 10^4$	$\sim 10^{11}$	$\sim 10^{14}$	$\sim 10^{15}$
$T_{H^+}$	$\sim 5 \times 10^{-11}$	$\sim 150$	$\sim 120$	$\sim 70$	$\sim 30$	$\sim 5 \times 10^7$	$\sim 10^{10}$	$\sim 10^{12}$

Employing the values in Table 1 we can calculate the entropies in all the stages.

### 3 RESULTS AND DISCUSSION

In each subsection below we discuss how we calculate the components of the entropy and its total value in each evolutionary stage. Then, in Table 2 we show which term of the entropy is dominant. This is of course impossible for a black hole, which does not have any ordinary component left and needs a separate consideration.

A comparison with other known entropy sources in the Universe is interesting, as discussed by Frampton et al. (2009). It is important to remark that stars giving rise to neutron stars/black holes represent  $\sim 1\%$  of the  $10^{22}$  stars present in the visible universe. In any case, the entropy content of all the stellar populations is tiny compared to other known components (i.e. CMB photons) and thus irrelevant for the whole budget.

#### 3.1 Molecular cloud

Giant molecular clouds are the main cradle of stars. Fragmentation of a giant cloud and further clumping and collapse of smaller units form the main blocks, as discussed above. These are composed mainly by neutral molecular hydrogen, being described roughly by the ideal gas law. Here we assume that the small clouds described in Section 2 clump together to amount the determined number of baryons as described in the previous section and that each is in equilibrium just before the clumping and collapse to form the stars in the zero-age main sequence (ZAMS). Because the temperature is  $T_{MC} = 20K \gg T_{Fe^-/ions}$  there is no degeneracy. Then, the entropy can be calculated by the expression for an ideal gas:

$$S_{MC} = \sum S_{SMCbaryons} = \sum N_{SMC,b} k_b \left( \ln \left( \frac{V_{SMC}}{N_{SMC,b}} \right) + \frac{3}{2} \ln \left( \frac{E_{inSMC}}{N_{SMC,b}} \right) + const \right), \quad (3)$$

where  $const = \frac{3}{2} \ln \left( \frac{4\pi m_u}{3h^2} \right) + \frac{5}{2}$ ,  $k_b$  is the Boltzmann constant,  $V_{SMC}$  is the volume of each small cloud and  $m_u$  is the atomic mass unit. The important assumption here is that the clouds are composed by molecular hydrogen only.

The total entropy in each of our four cases is the sum of the entropy of a certain number of small clouds that add up to a specific number of baryons. So, for our first object, 6.73 small clouds add up  $1.6 \times 10^{57}$ ; for the second, 34.98 small clouds add up  $8.3 \times 10^{57}$ ; for the third, 54.97 small clouds add up  $13.1 \times 10^{57}$ ; and for the fourth, 124.93 small clouds add up  $29.7 \times 10^{57}$ . Recall that each small cloud has  $1.19 \times 10^{56}$  baryons, as described in the previous section.

From our assumptions:  $E_{tot} = 0$ ,  $E_{pot} = -2E_{kin}$  and  $E_{kin} = \frac{3}{2} N k_b T_{cl}$ , we finally find

$$S_{MC1} = 4.77 \times 10^{42} \text{ erg/K} \quad \text{or} \quad S \rightarrow \frac{S}{k_b N} = 21.47;$$



$$S_{MC2} = 24.8 \times 10^{42} \text{erg/K} \quad \text{or} \quad S \rightarrow \frac{S}{k_b N} = 21.65;$$

$$S_{MC3} = 39.0 \times 10^{42} \text{erg/K} \quad \text{or} \quad S \rightarrow \frac{S}{k_b N} = 21.57;$$

and

$$S_{MC4} = 88.6 \times 10^{42} \text{erg/K} \quad \text{or} \quad S \rightarrow \frac{S}{k_b N} = 21.62.$$

The calculation of the entropy of a molecular cloud in an earlier stage is tricky and requires a careful consideration (not attempted here). In the transparent stages of the cloud, the radiation is not effectively coupled to matter and it is not clear whether it should be included. Nevertheless, this stage happens well before any actual condensation stage and is not important for our considerations.

### 3.2 Main Sequence stars

The second evolutionary stage encompass the Main Sequence (MS) stars, the region in the Hertzsprung-Russell (HR) diagram where the stars stay most of their lives. For stars in the range of masses worked out here,  $1.35 M_\odot$  to  $25 M_\odot$ , the period of residence in the MS is  $\sim 1/M^{2.5-3}$ , while the energy generation is mainly due to the so-called  $p-p$  chain for star with masses up to  $2 M_\odot$  and due to the CNO cycle for masses above  $2 M_\odot$ . In our case, this is roughly  $4 \text{Gyr}$ . As stated, typical temperatures of our four models are  $\geq 10^7 \text{K}$  while the Fermi temperature is  $\sim 10^5 \text{K}$  for electrons and  $\sim 10^2 \text{K}$  for ions of hydrogen ( $H^+$ ). Therefore, there is essentially no degeneracy along the Main Sequence, except maybe for a small degree of degeneracy in the inner core.

The four molecular clouds collapsed to form four models of Main Sequence stars with ZAMS masses  $1.35 M_\odot$ ,  $7 M_\odot$ ,  $11 M_\odot$ , and  $25 M_\odot$ . The MadStar evolutionary code calculates the entropy of the structure in a way that the entropy of each star at Main Sequence is:

$$S_{1.35M_\odot} = 8.26 \times 10^{44} \text{erg/K} \quad \text{or} \quad S \rightarrow \frac{S}{k_b N} = 3718;$$

$$S_{7M_\odot} = 53.5 \times 10^{44} \text{erg/K} \quad \text{or} \quad S \rightarrow \frac{S}{k_b N} = 4671;$$

$$S_{11M_\odot} = 78.3 \times 10^{44} \text{erg/K} \quad \text{or} \quad S \rightarrow \frac{S}{k_b N} = 4331;$$

$$S_{25M_\odot} = 212 \times 10^{44} \text{erg/K} \quad \text{or} \quad S \rightarrow \frac{S}{k_b N} = 5173.$$

The general behaviour of entropy with ageing inside the MS is to get smaller and smaller, as illustrated with the example of the star with  $1.35 M_\odot$ :

$$S_{ZAMS} = 8.26 \times 10^{44} \text{erg/K} \quad \text{or} \quad S \rightarrow \frac{S}{k_b N} = 3718;$$

$$S_{t=0.8 \text{Gyr}} = 8.13 \times 10^{44} \text{erg/K} \quad \text{or} \quad S \rightarrow \frac{S}{k_b N} = 3659;$$

$$S_{t=2 \text{Gyr}} = 7.70 \times 10^{44} \text{erg/K} \quad \text{or} \quad S \rightarrow \frac{S}{k_b N} = 3466;$$

and

$$S_{t=4 \text{ Gyr}} = 5.10 \times 10^{44} \text{ erg/K} \quad \text{or} \quad S \rightarrow \frac{S}{k_b N} = 2295.$$

A more general consideration of the behaviour of the entropy inside the Main Sequence for several masses and in the Post-Main Sequence stages will be given in section 3.7.

### 3.3 White dwarf

The condition of matter inside a white dwarf is fairly different in the two stages we considered. In the hot phase, the electrons are degenerate, but the ions constitute basically a Boltzmann gas. Therefore we have three components for the total entropy. While we can still use the same terms in the expression 3 for the ions and use the expression  $S_{rad} = \frac{4}{45} \frac{\pi^2 k_b^4}{c^3 \hbar^3} VT^3$  for the radiation, we need a new expression for the entropy of the degenerate matter:

$$S_{WD e^-} = \frac{1}{2} \frac{\pi^2 (x_e^2 + 1)^{1/2} N k_b \left( \frac{k_b T_{WD}}{m_e c^2} \right)}{x_e^2}, \quad (4)$$

where  $x_e \equiv \frac{p_{f e^-}}{m_e c}$  and  $p_{f e^-}$  is the Fermi momentum of the electron sea. The factor 1/2 comes from the supposition that  $N_p = N_n = N_e$ , that is reasonable for a white dwarf. From our calculation  $S_{e^-} \sim 10^{40} \text{ erg/K}$  and  $S_{ions} \sim 10^{42} \text{ erg/K}$ .

Thus, for the hot initial state we obtain

$$S_{WD hot} \simeq 1.27 \times 10^{42} \text{ erg/K} \quad \text{or} \quad S \rightarrow \frac{S}{k_b N} = 5.72.$$

However, as the star cools down the electrons remain degenerate, but the ions suffer a phase transition to form a *Coulomb lattice* (Mestel & Ruderman 1967). The Debye temperature marking the crossover of these regimes is for our model  $\theta_D \simeq 1.8 \times 10^8 \text{ K}$ . Because we chose a final ‘‘stationary’’ state with a temperature  $\sim 10^5 \text{ K} \ll \theta_D$ , we are well inside the regime where the heat capacity goes with  $\sim T^3$  corresponding to phonon lattice excitations. The entropy is given then by

$$S_{WD cold-ions} = \frac{16N\pi^4 k_b}{15} \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3 \sim 10^{33} \text{ erg/K} \quad (5)$$

while for the degenerate electrons  $S_{e^-} \sim 10^{36} \text{ erg/K}$ .

For the cold final state we then obtain

$$S_{WD cold} \simeq 4.14 \times 10^{36} \text{ erg/K} \quad \text{or} \quad S \rightarrow \frac{S}{k_b N} = 1.86 \times 10^{-5}.$$

We see that the entropy budget changes along the cooling age of a white dwarf. At first, in the hot WD state, most of the entropy is stored in the ions. In the cold WD state, the degenerate electrons eventually hold the largest fraction of entropy, being the excess of entropy carried away by the photons.

### 3.4 Neutron star

Again, the state of matter inside the star differs radically in these phases. In the proto-neutron star phase the assumed temperature is  $5 \times 10^{11} \text{ K}$  resulting in electrons which are still degenerate (the Fermi temperature in this configuration is  $T_{Fe^-} \sim 10^{13} \text{ K}$ ), but the neutrons can still be considered a non-degenerate gas with some degeneracy correction (the Fermi temperature in this state is  $T_{F ions} \sim 5 \times 10^{10} \text{ K}$ ).

Then, the entropy of a proto-neutron<sup>4</sup> star is given by the entropy of degenerate electrons plus the entropy of a neutron Boltzmann gas:

$$S_{PNS} \simeq 2.96 \times 10^{42} \text{ erg/K} \quad \text{or} \quad S \rightarrow \frac{S}{k_b N} = 13.32.$$

After the proto-neutron star phase, the neutron star settles and quickly cools down via neutrino emission. Our model for cold neutron stars results from solving the Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations (Weber 1999) complemented by the SLy4 equation of state (Douchin & Haensel 2001), a particularly suitable choice for a compact star composed by very neutron rich matter with interactions. We selected the star with  $N = 1.6 \times 10^{57}$  baryons which correspond to a (gravitational) mass  $M \simeq 1.23 M_\odot$  and radius  $R = 11.15 \text{ km}$ , showing the effects of stronger gravity in these objects through a lower total mass (larger binding).

Assuming a temperature of  $T_{NS} \sim 1 \times 10^9 \text{ K}$  in this later stage, the neutrons become degenerate and support the star against further collapse. Then the stellar entropy is given by the entropy of degenerate neutrons (we have neglected the small fraction of electrons/protons enforced by beta equilibrium):

$$S_{NS} = \frac{\pi^2 (x_n^2 + 1)^{1/2} N k_b \left( \frac{k_b T_{NS}}{m_n c^2} \right)}{x_n^2}, \quad (6)$$

where  $x_n \equiv \frac{p_{fn}}{m_n c}$  and  $p_{fn}$  is the Fermi momentum of the neutron sea.

The entropy is then

$$S_{NShot} \simeq 1.21 \times 10^{39} \text{ erg/K} \quad \text{or} \quad S \rightarrow \frac{S}{k_b N} = 5.45 \times 10^{-3}.$$

As the neutron star cools down, eventually reaching a temperature of  $T_{NS} \sim 1 \times 10^7 \text{ K}$  in the core, its entropy decreases further to

$$S_{NScold} \simeq 1.21 \times 10^{37} \text{ erg/K} \quad \text{or} \quad S \rightarrow \frac{S}{k_b N} = 5.45 \times 10^{-5}.$$

At this stage, the entropy decrease is mainly due to photon emission.

### 3.5 Black hole

A black hole is a region in space-time in which an event horizon has been formed and enclosed all the matter of the progenitor, and ultimately it does not matter which kind of particles contributed to it. Because there is no access to the interior content of a black hole, a thermodynamic description of the collapse cannot be based on the entropy of the contents since these are lost from the observable universe.

The black hole entropy depends solely on the observable properties of the black hole: mass, electric charge and angular momentum. Because of the area theorem (Bekenstein 1973, 1974), these three parameters appear in a combination defining the area. The expression for the entropy of a Schwarzschild (non-rotating, uncharged) black hole is given by:

$$S_{BH} = \frac{k_b A}{4G\hbar} = \frac{4k_b \pi G (Nm_u)^2}{\hbar c}, \quad (7)$$

where we used the fact that  $A = 4\pi R_H^2 = 16\pi (GM/c^2)^2$  with  $R_H = 2GM/c^2$ .

The numeric value of the entropy of  $1.6 \times 10^{57}$  baryons enclosed by the event horizon is then

$$S_{BH} \simeq 2.63 \times 10^{61} \text{ erg/K} \quad \text{or} \quad S \rightarrow \frac{S}{k_b N} = 1.2 \times 10^{20}.$$

---

<sup>4</sup> Here we used a radius  $R_{PNS} = 5R_{NS}$ , where  $R_{NS} = 11.15 \text{ km}$ ; which mimics the hot stage before cooling

That is many orders of magnitude larger than the preceding states of matter. This can be considered a measure of the degree of irreversibility of the ultimate collapse to form black holes out of known matter and energy, that is, the entropy currents are quickly stopped from flowing out the black hole because of the horizon formation and the highly irreversible collapse generates huge amounts of entropy. This qualitative picture, however, cannot be taken too seriously, since it is not clear yet how exactly the entropy is located in the area (making  $S$  a non-extensive quantity), a subject of much discussion and calculations for string theorists and loop quantum gravity researchers (Ghosh & Perez 2011; Jacobson et al. 2005) beyond the scope of our work.

### 3.6 Thermodynamic entropy summary

In Table 2 we show the dominant entropy contribution in each compact object with  $1.6 \times 10^{57}$  baryons reflecting, *at the same time*, how entropy end up stored in the final configurations at different states of matter and the evolutionary path as the stars go through their lives. In Figure 1 we show the thermodynamic entropy *per baryon* in units of  $k_b$  as a function of the central density at each stage of the evolution (notice that for a black hole we assumed an effective central density of  $10^{18} g/cm^3$  for plotting purposes).

It is most important to realize that in stellar evolution gravity drives ultimately the changes in the energetic processes in the interior of stars and the final states of matter in the compact objects accordingly to the mass of each progenitor star.

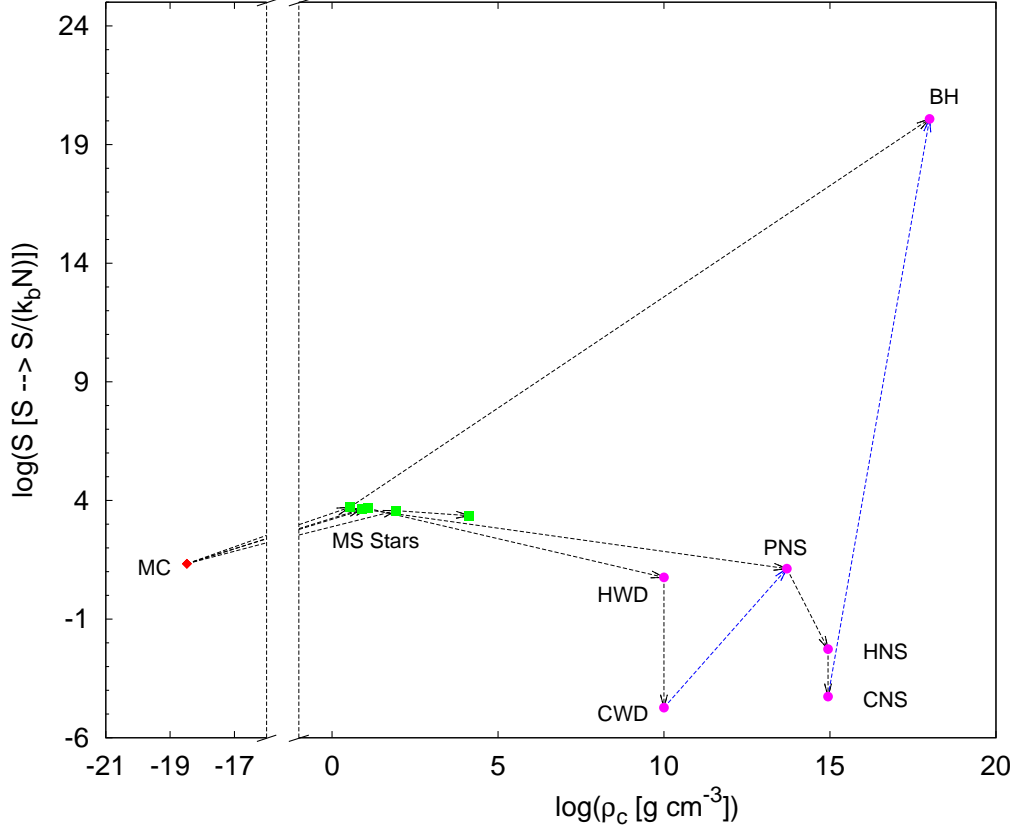
The important comparison is then between the progenitor main sequence stars of  $7 M_\odot$ ,  $11 M_\odot$  and  $25 M_\odot$ , and the “initial” final configurations hot white dwarf, hot neutron star (passing through the proto-neutron star phase), and black hole. We clearly see a trend in lowering the entropy from earlier stages until the final configurations.

From the point of view of the baryon content in relation to the state of matter inside the compact objects, we see that although the main sequence star of  $7 M_\odot$  has lower entropy than the  $11 M_\odot$  star, the entropy jump to a state of lower entropy is higher from the star of  $11 M_\odot$  to the neutron star than from the star of  $7 M_\odot$  to the white dwarf. Thus, for the same number of baryons, the more compact object has the lower entropy and this difference is due to the structural changes of matter, from ordinary matter in white dwarfs to very neutron-rich matter in neutron stars. In this respect the entropy of the proto-neutron star is very similar to the entropy of the hot white dwarf, since in broad terms, the proto-neutron stars is a kind of iron white dwarf, with matter in a state that resembles the state of white dwarf.

Gravity is the ultimate force driving the entropy changes and stellar evolution. Then one can wonder why the most compact object, the black hole, has a entropy that is so many orders of magnitude higher than the other compact objects with the same number of baryons, apparently contradicting the very conclusion we stated in the previous paragraph. The answer lays in the gravity field itself and its putative entropy content. We shall see below that the latter could nicely explain the big difference of entropy content between low and high curvature stars.

**Table 2** Entropy components [erg/K] of each compact object with  $1.6 \times 10^{57}$  baryons given by our hypotheses: white dwarf (WD), proto-neutron star (PNS), neutron star (NS), and black hole (BH).

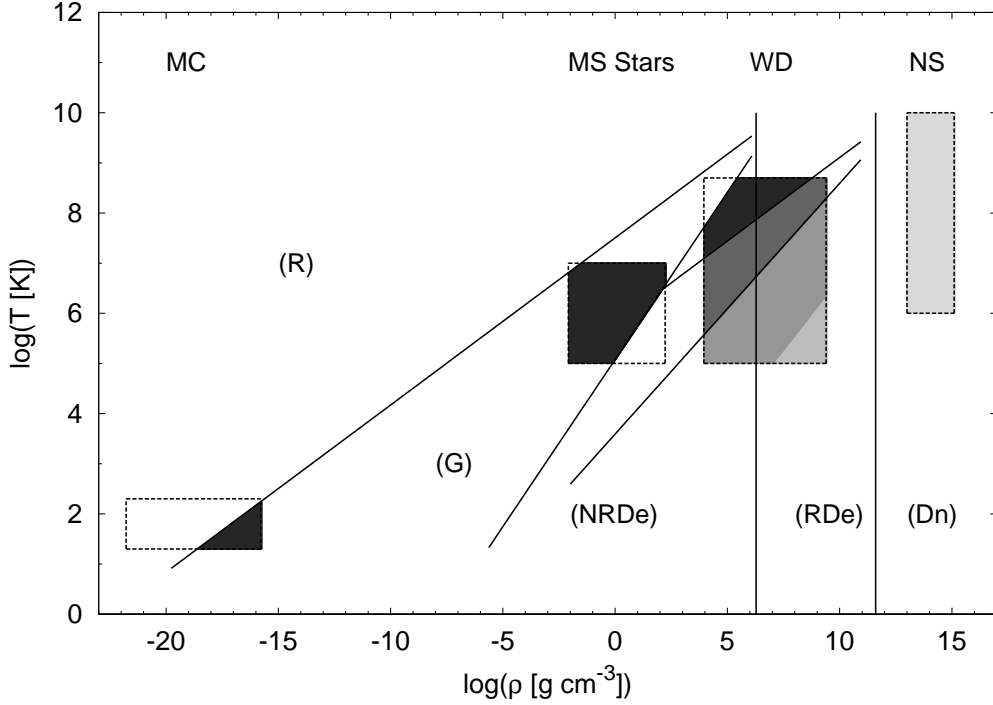
	Radiation	Ideal baryons	Ideal electrons	Degenerate $e^-$	Crystal	Degenerate $n$	Area
HWD	$\sim 10^{37}$	$\sim 10^{42}$	–	$\sim 10^{40}$	–	–	–
CWD	$\sim 10^{26}$	–	–	$\sim 10^{36}$	$\sim 10^{33}$	–	–
PNS	$\sim 10^{42}$	$\sim 10^{42}$	–	$\sim 10^{42}$	–	–	–
HNS	$\sim 10^{32}$	–	–	–	–	$\sim 10^{39}$	–
CNS	$\sim 10^{26}$	–	–	–	–	$\sim 10^{37}$	–
BH	$\sim 10^{-17}$	–	–	–	–	–	$\sim 10^{61}$



**Fig. 1** Thermodynamic entropy *per baryon* in units of  $k_b$  versus the central density of the objects in each stage of evolution. The (red) diamonds are the four molecular clouds; the (green) squares are the four main sequence stars (note that there are five squares, but one of them represents an evolved version of the same  $1.35 M_\odot$  star); and the (pink) circles represent the compact stars (white dwarf, neutron star and black holes plus the proto-neutron star). The (black) arrows show the changes (or “evolution”) of the entropy as stellar evolution proceeds. The two (blue) arrows going from the cold white dwarf to the proto-neutron star and from the cold neutron star to the black hole are the special case of induced collapse. Notice that for a black hole we assumed an effective central density of  $10^{18} g/cm^3$  for plotting purposes

To finish the thermodynamic entropy summary, we show in Figure 2 regions in the plane  $T$  vs  $\rho$  which entropy regime is dominant in the typical density and temperature range corresponding to the models studied here. We also show the well-known dominant pressure regimes for comparison.

We see that the entropy regimes are *not* directly connected to the pressure regimes, although they overlap in many situations. This can be seen in the specific case of a white dwarf case: while the electron degeneracy pressure is dominant through the whole range of densities of white dwarfs, the entropy of the degenerate electrons is dominant only in the regime of low temperatures and high densities (the



**Fig. 2** The region above the first left line (R) is radiation pressure-dominated; the region between the first left line and the second line (G) is gas pressure-dominated; the pressure of non-relativistic degenerate electrons (NRDe<sup>-</sup>) is dominant in the region between the second line and the first vertical line; the region between the two vertical lines is dominated by the pressure of the relativistic degenerate electrons (RDe<sup>-</sup>); the region to the right of the second vertical line is dominated by the pressure of degenerate neutrons (Dn). The other two lines, the ones crossing the first vertical line, define a change in the regime of the specific heats of the ions inside white dwarfs due to crystallization. Regarding entropy, in the darkest regions the entropy is dominated by the entropy of the Boltzmann gas; in the second darker region the entropy is dominated by the entropy of a hot lattice of ions; in the third darker region the entropy is dominated by the entropy of cold crystallized ions lattice; in the lightest grey region of the WD box the entropy is dominated by the entropy of degenerate electrons; and finally, in the region of the NS box the entropy is dominated by the entropy of degenerate neutrons.

lighter grey region of the WD box of Figure 2). This change is directly related to the evolution of the white dwarfs, more specifically to the cooling and to the fact that there is no energy generation inside the core of these objects. A similar behaviour may occur for the degenerate neutron composition case, and it is worth further study.

### 3.7 Actual Main Sequence stars and beyond

The considerations made above about the entropy of an idealized path for a fixed baryon number were intended to show how this quantity evolves as successive stellar equilibrium states arise. However, it is

clear that actual stars do *not* complete the whole evolution, and therefore it is important to discuss how the entropy behaves for the whole range of stellar masses in actual stars.

It is currently agreed that nuclear reactions start for the central conditions of stars with mass above  $0.08M_{\odot}$  (for solar composition). Besides, the stellar structure is stable up to a high mass limit of at least  $90M_{\odot}$  and possibly of  $\sim 130M_{\odot}$ . Within these two extremes, the stellar structure varies and the entropy characterizing the star is subject to a quite different behaviour. Generally speaking, it is well-known that a stellar core or shell may transport energy in the *radiative* mode (diffusion of photons driven by a small temperature gradient, the so-called local thermodynamic equilibrium condition, LTE) or, when the stability criterion formulated in terms of the size of the temperature gradient  $\frac{dT}{dr}$  is violated, in the *convective* mode, in which large-scale motions of the fluid itself are involved (Kippenhahn & Weigert 1994). The latter regime is difficult to model since a variety of scales and complex phenomena (i.e. turbulence) play a crucial role. Therefore, simple approaches ignoring the multi-scale dimension in favour of a representative “bubble” are employed, the most popular being the mixing length theory which parametrizes a number of physical effects with a single dimensionless quantity  $\alpha$ , expected to be  $O(1)$ . Even the plain substitution of the true temperature gradient by the adiabatic temperature gradient  $\left.\frac{dT}{dr}\right|_{ad}$  is many times employed for calculations based on the fact that the actual value of the gradient cannot be large on physical grounds, since convection is very efficient and there is little room for a large value build-up of temperature differences (see the textbooks in Carroll & Ostlie (2006); Kippenhahn & Weigert (1994)).

The behaviour of entropy in both cases (diffusive vs. convective) is very different, and an additional condition, that of virial equilibrium, is determinant for its value, at least as long as the balance is dominated by the ideal gas component and not by degenerate electrons or radiation, as we shall see in a moment.

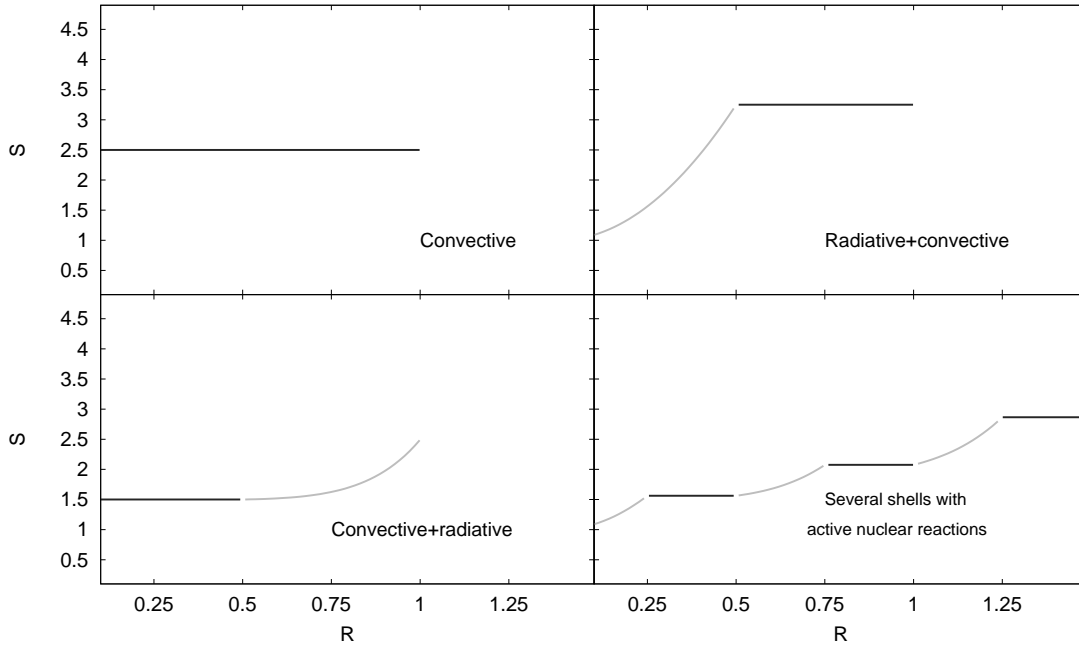
The virial relation states that, in equilibrium, the gravitational and thermal energies satisfy  $\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = 2\frac{3}{2}NkT = 3\frac{M}{\mu m_H}kT$ , where  $N$  is the total number of particles,  $\mu$  is the mean molecular weight of the gas and  $m_H$  is the hydrogen mass. If we assume a constant value of the density, a simple manipulation of the relation yields  $T \sim \frac{G\mu m_H}{k}M^{2/3}\rho^{1/3}$ . In such a case, the expression of the ideal gas shows that the entropy decreases with increasing temperature, in complete agreement with the Second Law *when subject* to the virial equilibrium condition. It is said sometimes that the star “digs an entropy hole” along its evolutionary path, but this behaviour ceases as long as some other component (i.e. degenerate electrons) dominates the entropy balance.

The observation that large-scale motion of the fluid is the dominating transport mechanism beyond a certain value of the temperature gradient (the convective regime) leads to a variety of situations along the stellar evolution for a given mass, and also to different configurations for stars with different masses. But another important feature of the stellar interior will be relevant for an overview of the entropy. It is related to the condition in which nuclear energy is released by fusion reactions. Simple calculations show that around  $\sim 2M_{\odot}$  the main reactions from *CNO* catalytic cycle overcome the so-called *p-p* channel, and therefore the heavier stars burn hydrogen in a much more dramatic way, since the latter is *very* dependent on the temperature (in contrast with the former which is very mildly dependent on  $T$ ).

Thus, stars below this “great divide” threshold develop a steep gradient only at the outer layers, whereas above it the steep gradient is present in the core. Therefore, the structure of stars in the first regime (termed *Lower Main Sequence*) is radiative on the inside, and convective outside, all the way to the photosphere. Those in the *Upper Main Sequence*, in turn, become convective inside and keep a radiative envelope.

If we consider stars of lower and higher masses away from the threshold, there are two important boundaries to be noticed in the mass parameter: stars below  $\sim 0.3M_{\odot}$  are totally convective as the result of the systematic inwards advance of the convective envelope from  $\sim 2M_{\odot}$  solar mass towards the lowest values. In addition, the convective core *grows* with mass at the other end, i.e.,  $M_{convective}/M_{total}$  grows from  $\sim 50\%$  for a  $20M_{\odot}$  star up to  $\sim 80\%$  for a  $100M_{\odot}$  star. Those stars in between present both convective and radiative regions, as discussed above.

Given these features and considering the homogenization provided by convection, the entropy profile of any star residing in the Main Sequence can be depicted as in Figure 3. The first extreme (below  $\sim 0.3M_{\odot}$ ) corresponds to a constant value of the entropy, as showed in the upper left panel of Figure 3. More massive stars, of the solar type, and up to around  $\sim 2M_{\odot}$  are represented by the upper right panel of the same Figure, featuring a radiative core and a convective envelope. Still more massive ones, up to  $\sim 20M_{\odot}$  or so, correspond to the profile shown in the lower left panel; and those stars above this value are again represented by a constant value of  $S$  (upper left panel).



**Fig. 3** Entropy regimes (arbitrary units). For plotting purposes we used the same scale for all plots.

From the point of view of the entropy, similar behaviour occurs when stars leave the Main Sequence evolving towards the right of the HR diagram. Low-mass stars develop an increasingly massive helium core, mostly degenerate for solar-mass stars and below. The envelope expands and becomes convective inwards (the reverse of the Hayashi track in the stellar formation process...), and the entropy distribution resembles the one in Figure 3 (lower right panel). Note that degenerate cores, by their own nature, do *not* diminish their entropies with increasing temperature. In contrast, upper main sequence stars develop normal, non-degenerate cores and depending on their exact value, end their lives as white dwarfs (those up to around  $8M_{\odot}$ ) or ignite further nuclear reactions. The full sequence of available nuclear cycles (including true fusion reactions and photo-disintegration rearrangements, yielding net energy) is achieved for masses beyond  $\sim 10M_{\odot}$ . For the range  $8 - 10M_{\odot}$  it is expected that a degenerate  $O - Mg - Ne$  core is formed, but the conditions would not be enough to go beyond the carbon cycle. Since when each of the combustion cycles are no longer possible, the inert core contracts and the reactions formerly at the center migrate to a shell around it, the so-called “onion structure” develops for the more massive stars, in particular, in those with  $M \geq 10M_{\odot}$  which would complete the ignition of all available nuclear reactions. The entropy, in turn, adopts a constant value inside convective cores, but given that the virial condition must be maintained, its value *decreases* for each new cycle. Meanwhile, the radiative



shells adopt the entropy distribution growing from the inner to the outer edge of the shell in each case. Thus, the entropy distribution for any given stage of massive stars is qualitatively similar to that shown in the lower right panel of Fig. 3. This process of decreasing the entropy per baryon at the center is more pronounced for the lighter range of massive stars, since the relation  $T \sim \frac{G\mu m_H}{k} M^{2/3} \rho^{1/3}$  leads to  $\frac{T^3}{\rho} \propto M^2$ , and the ideal gas entropy then increases with increasing mass, being much higher for the range  $15 - 20M_\odot$  and beyond. Since the end of these stars as core collapse supernovae depend on the binding energy of the core, directly related to the entropy per baryon, the low entropy per baryon in the  $\sim 10M_\odot$  range was considered as a favourable condition for the explosions to succeed, although many other factors seem to be at play in this process (Murphy et al. 2013).

At last, a remark should be made regarding actual stars and systems of stars. Binary evolution channels are very important for the formation and evolution of compact objects, but introduce new complications to the entropy considerations which lie beyond the scope of the present approach. For comprehensive considerations of a possible common envelope phase we refer to Ge et al. (2010a,b).

#### 4 CONCLUSIONS

We have seen that the gravitational compactification of stellar matter makes the thermodynamic entropy of matter to *decrease* from the main sequence stars to their correspondent compact stars in an ordered, monotonic sequence. This decrease of the thermodynamic entropy of matter is not at all in contradiction with the Second Law since the gravitational contraction releases high-entropy radiation (and even neutrinos) in a way that more than compensates the decrease in the matter entropy of the object. Thus, it is the ability to radiate away entropy what keeps the entropy of stars decreasing.

Starting with the condensations in a molecular cloud, as the collapses goes on, the core of the object is heated by the contraction up to the point the fusion reactions of protons into helium begins. At this moment, the processes in the core balance gravity and the contraction halts, but the thermodynamic entropy of matter remains lower than that it was in its initial state. Later on, as the nuclear fuel of the star is exhausted, a new contraction begins, being halted only when the heat capacity becomes positive again when a phase transition of matter occurs. After a few billion years, a white dwarf is formed with a still lower thermodynamic entropy.

In other words, the entropy decrease of matter with the gravitational contraction is at the expense of an increase in the entropy of the immediate environment due to the release of very high-entropy radiation/neutrinos during the life of stars in the Main Sequence and beyond. There is a delicate balance of two processes. The fusion reactions *per se* can be thought to lower the entropy because the number of particles diminishes. However, this process is highly exothermic, and increases the local entropy due to local heating. Which effect dominates depends on the local temperature: at low temperature (relative to nuclear scales), the entropy gain from the exothermic reactions is favoured. When the temperature of the core reaches some threshold, the reactions become entropically unfavoured and stop. This coincides with the jump to the next stage of the evolution of the objects. In the white dwarf and neutron star stages, the entropy budget suffers a stronger influence from cooling processes, since the structure of these objects will remain unchanged for time-scales which are infinite in practice. However, the injection of entropy in the environment is never too extreme, for example, a (type II) massive star supernova will produce around  $3 \times 10^{42} \text{ erg}/K$  of entropy mainly in neutrinos. A hundred times this figure will be injected due to the dissipation of the massive ejecta, ultimately leading to dust heating of the interstellar medium. These numbers are still lower than the total entropy introduced by the heating of dust due to the absorption of ordinary radiation of stars (Bousso et al. 2007; Frampton et al. 2009).

Gravity plays a major role in all these contractions and entropy changes, driving stellar evolution towards its end. Gravity is responsible, again, for the formation of a black hole. As seen above, collapse under gravity causes entropy to increase enormously; however here the black hole itself “cools down” to a very low Hawking temperature (for a solar-mass or so black hole), much smaller than the external temperature while its entropy increases astonishingly. Because black holes have negative heat capacity, they absorb radiation faster than they can emit by the Hawking mechanism. We face a very special case:

the environment is *cooled* by the collapse (differently than in normal stars) while the entropy of the matter in the black hole is very high (Wallace 2010).

As mentioned earlier, the gravitational field itself may carry and store entropy. This entropy has been related to the curvature inside the stars, but it is negligible from Newtonian objects like the molecular clouds, main sequence stars and white dwarfs. For neutron star, constructed under the framework of General Relativity, the entropy of gravity is expected to be larger, but still does not alter significantly the entropy budget of this very compact star. However, things change considerably when a massive main sequence star collapses to form a black hole. Black holes are “pure gravity”, a singular point in the metric that in which the curvature term goes to infinity, forming an object from which no matter can ever escape. That is why this collapse actually *increases* the entropy stored in this object. There is considerable activity in the community to construct and characterize a gravitational entropy. A definite recent example is the proposal of Clifton et al. (2013) in which a “gravitational entropy” has been suggested based on the Bel-Robinson tensor which makes use of the Weyl part of the curvature tensor  $C_{abcd}$  (see Sussman & Larena (2014) for applications). Thus, such a proposal attaches an increasing entropy to the gravitation which is related to the increasing curvature value. As a particular example, the gravitational entropy reduces to the Bekenstein-Hawking value for the case of a Schwarzschild black hole. Therefore, if this proposal stands, the origin of the black hole huge entropy could be thought as the limiting case of action of gravity in stars. not only by forcing the change of state of the matter (discussed above), but also leading to the highest available found in nature.

The evolution of black hole in a cosmological environment has been considered before. At some point the background becomes as cool as the black hole itself, driven by the expansion of the Universe, but further evolution can not preserve the thermal equilibrium (Custódio & Horvath 2003). Rather, the black hole begins to evaporate and eventually disappears (Hawking 1975) or leaves a tiny quantum residual, meaning that most of its entropy returns eventually to the environment.

We have seen in this work that entropy in its multifarious forms plays an important role in Stellar Evolution theory. We discussed how the gravitational contraction/collapse, although irreversible in nature *lowers* the entropy of matter relatively to its initial state. However, we still have a long journey towards complete understanding of the role of entropy in the fate of stars. We conjecture, however, that there is a synthesis to be made from the study of entropy in stars from a totally general point of view.

**Acknowledgements** We acknowledge the financial support received from the Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo. J.E.H. wishes to acknowledge the CNPq Agency (Brazil) for partial financial support.

## References

- Bekenstein, J. D. 1973, Phys. Rev. D, 7, 2333 [5, 9](#)  
 Bekenstein, J. D. 1974, Phys. Rev. D, 9, 3292 [5, 9](#)  
 Bousso, R., Harnik, R., Kribs, G. D., & Perez, G. 2007, Phys. Rev. D, 76, 043513 [15](#)  
 Caproni, A., Abraham, Z., & Vilas-Boas, J. W. S. 2000, A&A, 361, 685 [5](#)  
 Carroll, B. W., & Ostlie, D. A. 2006, An introduction to modern astrophysics and cosmology [13](#)  
 Chandrasekhar, S. 1931, ApJ, 74, 81 [4](#)  
 Clayton, D. D. 1968, Principles of stellar evolution and nucleosynthesis [3](#)  
 Clifton, T., Ellis, G. F. R., & Tavakol, R. 2013, Classical and Quantum Gravity, 30, 125009 [16](#)  
 Custódio, P. S., & Horvath, J. E. 2003, American Journal of Physics, 71, 1237 [16](#)  
 Douchin, F., & Haensel, P. 2001, A&A, 380, 151 [9](#)  
 Frampton, P. H., Hsu, S. D. H., Kephart, T. W., & Reeb, D. 2009, Classical and Quantum Gravity, 26, 145005 [6, 15](#)  
 Ge, H., Hjellming, M. S., Webbink, R. F., Chen, X., & Han, Z. 2010a, ApJ, 717, 724 [15](#)  
 Ge, H., Webbink, R. F., Han, Z., & Chen, X. 2010b, Ap&SS, 329, 243 [15](#)  
 Ghosh, A., & Perez, A. 2011, Physical Review Letters, 107, 241301 [10](#)  
 Hawking, S. W. 1975, Communications in Mathematical Physics, 43, 199 [16](#)

- Jacobson, T., Marolf, D., & Rovelli, C. 2005, *International Journal of Theoretical Physics*, 44, 1807 10
- Kippenhahn, R., & Weigert, A. 1994, *Stellar Structure and Evolution* 13
- Mestel, L., & Ruderman, M. A. 1967, *MNRAS*, 136, 27 8
- Müller, I. 2007, *A History of Thermodynamics, the Doctrine of Energy and Entropy* 1
- Müller, I. 2008, *Entropy*, 10, 462 1
- Murphy, J. W., Dolence, J. C., & Burrows, A. 2013, *ApJ*, 771, 52 15
- Schönberg, M., & Chandrasekhar, S. 1942, *ApJ*, 96, 161 4
- Sussman, R. A., & Larena, J. 2014, *Classical and Quantum Gravity*, 31, 075021 16
- Valentim, R., Rangel, E., & Horvath, J. E. 2011, *MNRAS*, 414, 1427 4
- van den Heuvel, E. P. J. 2011, *Bulletin of the Astronomical Society of India*, 39, 1 4
- Wallace, D. 2010, *British Journal for Philosophy of Science*, Volume 61, Issue 3, pp. 513-540, 61, 513 16
- Weber, F., ed. 1999, *Pulsars as astrophysical laboratories for nuclear and particle physics (Series in High Energy Physics, Cosmology and Gravitation)* 9



## Fontes de Programas

### D.1 *tovsolver*

O programa *TOVSolver* é um *toolchain* de shell scripts e executáveis, cuja atribuição é a integração das equações de estrutura TOV e extração dos dados para geração de gráficos. A versão atualizada dos fontes pode ser encontrada no endereço <https://github.com/rsouza01/tovsolver>. Nas seções seguintes são listados os fontes dos scripts e da aplicação.

#### *Programas em Shell*

```
1 #!/bin/bash
2 #
3 #
4 # tovsolver-chain.sh - Runs a sequence of commands in order to solve the
5 #                       star profile.
6 #
7 # Author:   Rodrigo Alvares de Souza
8 #           rsouza01@gmail.com
9 #
10 #
11 # History:
12 # Version 0.1: 2015/05/12 (rsouza) - Creating the file.
13 # Version 0.2: 2015/06/09 (rsouza) - Minor bug fixes.
14 #
15 ##
16
17 rm -f ./output/*.csv && rm -f ./output/*.txt && ./scripts/tovsolver-batch.sh && ./scripts/
   tovsolver-genoutput.sh
   ./programs/tovsolver/src/scripts/tovsolver-chain.sh
```

```

1 #!/bin/bash
2 #
3 #
4 # tovsolver-batch.sh - Executes the TOV solver for a batch of central
5 # densities, found in the EoS file.
6 #
7 # Author: Rodrigo Alvares de Souza
8 #         rsouza01@gmail.com
9 #
10 #
11 # History:
12 # Version 0.4: 2014/04/05 (rsouza) - Improving legibility, adding coments, etc.
13 # Version 0.5: 2014/04/14 (rsouza) - Update regarding the tov_parameters.sh.
14 # Version 0.6: 2014/04/16 (rsouza) - Added error treatment, sanity checks and some colors
15 # Version 0.7: 2015/05/11 (rsouza) - New name, minor improvements.
16 #
17 # DO NOT EDIT THIS FILE.
18 # MODEL RELATED PARAMETERS SHOULD BE ENTERED VIA COMMAND LINE PARAMETERS.
19 # IN PRINCIPLE, THESE PARAMETERS DO NOT NEED TO BE CHANGED.
20 #
21 #FUNCTIONS DEFINITIONS
22 #
23 print2stringsIncolor () {
24     echo -e "\e[0m$1\e[1;34m$2\e[0m\n"
25 }
26 #
27
28 print2stringsIncolorERROR () {
29     echo -e "\e[0m$1\e[1;91m$2\e[0m\n"
30 }
31 #
32
33 printIncolor () {
34     echo -e "\e[1;34m$1\e[0m\n"
35 }
36 #
37
38 printIncolorERROR () {
39     echo -e "\e[1;91m$1\e[0m\n"
40 }
41 #END FUNCTIONS DEFINITIONS
42 #
43 #MAIN PROGRAM
44 _CONFIG_FILE="./tov_solver.conf"
45 _OUTPUT_DIR="./output/"
46 EXECUTABLE="./towsolver"
47
48 USE_MESSAGE="
49 Usage: $(basename "$0") [OPTIONS]
50
51 OPTIONS:
52 -c, --config           Sets the TOV Solver config file, '${_CONFIG_FILE}' by default.
53 -o, --outputdir       Sets the Output directory, '${_OUTPUT_DIR}' by default.
54 -e, --executable      Sets the TOV Solver executable, '${EXECUTABLE}' by default.
55
56 -h, --help            Show this help screen and exits
57 -V, --version         Show program version and exits
58 "
59
60 _VERSION=$(grep '^# Version ' "$0" | tail -1 | cut -d : -f 1 | tr -d \#)
61 #Command line arguments
62 while test -n "$1"
63 do
64     case "$1" in
65         -c | --config)
66             shift
67             _CONFIG_FILE=$1
68             ;;
69         -o | --outputdir)
70             shift
71             _OUTPUT_DIR=$1
72             ;;
73         -e | --executable)
74             shift
75             EXECUTABLE=$1
76             ;;
77         -h | --help)
78             echo "$USE_MESSAGE"
79             exit 0
80             ;;
81     esac
82 done

```

```

85     -V | --version)
87         echo -n $(basename "$0")
89             echo " ${_VERSION}"
91         exit 0
92     ;;
93     *)
94         echo Invalid option: $1
95         exit 1
96     ;;
97 esac
98
99 shift
100 done
101
102 #Lets find out which EoS file we should use...
103 while read LINE; do
104     #Ignoring comments...
105     [ "$(echo $LINE | cut -c1)" = '#' ] && continue
106
107     #Ignoring white lines...
108     [ "$LINE" ] || continue
109
110     #Splits the config file line
111     arrIN=(${LINE//=/ })
112
113     #Taking the key value but converting to lower case first.
114     key=$(echo ${arrIN[0]} | tr A-Z a-z)
115
116     #Taking the value.
117     value=${arrIN[1]}
118
119     case "$key" in
120         eos_file_name) _EOS_FILE_NAME=$value ;;
121     esac
122
123 done < "$_${_CONFIG_FILE}"
124
125 printfncolor "\n\
126     n
127     -----
128     TOV Solver Shell Script ${_VERSION}
129     -----
130 "
131
132 # Replaces the INTERNAL FIELD SEPARATOR, but storing a copy first
133 OLD_IFS=$IFS
134 IFS=', '
135
136 print2stringsncolor "EoS file: " "${_EOS_FILE_NAME}"
137 print2stringsncolor "Batch config file: " "${_CONFIG_FILE}"
138 print2stringsncolor "Output folder: " "${_OUTPUT_DIR}"
139
140 # Does the EoS file exist?
141 if [ ! -f $_EOS_FILE_NAME ]
142 then
143     printfncolorERROR "EoS file '$$_EOS_FILE_NAME' not found."
144     exit -1
145 fi
146
147 # Does the output dir exist?
148 if [ ! -d "$_OUTPUT_DIR" ]; then
149     echo "Folder '$$_OUTPUT_DIR' not found, creating..."
150     mkdir $_OUTPUT_DIR
151 fi
152
153 # Does the Executable file exist?
154 if [ ! -f $_EXECUTABLE ]
155 then
156     printfncolorERROR "Executable file '$$_EXECUTABLE' not found."
157     exit -1
158 fi
159
160 #Is the executable executable?
161 if [ ! -x $_EXECUTABLE ]
162 then
163     printfncolorERROR "'$_EXECUTABLE' does not have execution permission.\nRun 'sudo chmod
164         a+x $_EXECUTABLE'"
165     exit -1
166 fi
167
168 echo "

```

```

165     "
166 declare -i secondsProcessing=0
167 while read line; do
168     arr=($line)
169     _rho_0=${arr[0]}
170
171     #Ignores lines beginning with '#'
172     if [[ $_rho_0 != '#'* ]];
173     then
174         echo "Processing rho_0=${_rho_0}..."
175
176         beginProcessing='date +%s%N | cut -b1-13'
177
178         commandLine="${EXECUTABLE} -rho_0=${_rho_0} -config=${_CONFIG_FILE} > ${_OUTPUT_DIR}
179         out_${_rho_0}.txt"
180
181         echo $commandLine
182
183         #Next command is a possible flaw in hands of ill-intentioned users.
184         #Please do not execute this script as a root.
185         eval $commandLine
186
187         if [ $? -ne 0 ]; then
188             print2stringsIncolorERROR "Return status: " "ERROR!"
189         else
190             print2stringsIncolor "Return status: " "OK!"
191         fi
192
193         endProcessing='date +%s%N | cut -b1-13'
194
195         secondsProcessing=endProcessing-beginProcessing
196
197         echo "Processing time: $secondsProcessing ms."
198
199         #Return code == 0 ? 'GREAT SUCCESS!!' : 'NAUGHTY, NAUGHTY!'
200
201         echo "
202         -----
203     fi
204 done < "$_EOS_FILE_NAME"
205 #Restoring the INTERNAL FIELD SEPARATOR
206 IFS=$OLD_IFS
207
208 printIncolor "Done."

```

./programs/tovsolver/src/scripts/tovsolver-batch.sh



```

1 #!/bin/bash
2 #
3 #
4 # tovsolver-genoutput.sh - Process the output files generated by TOV_Solver and
5 # generates a file with mass, radius, pressure, etc.
6 #
7 # Author: Rodrigo Alvares de Souza
8 # rsouza01@gmail.com
9 #
10 #
11 # History:
12 # Version 0.4: 2014/04/04 (rsouza) - improving legibility, adding coments, etc.
13 # Version 0.5: 2014/04/18 (rsouza) - Added error treatment, sanity checks and some colors
14 # :~).
15 # Version 0.6: 2015/05/11 (rsouza) - New name, minor improvements.
16 #
17 #FUNCTIONS DEFINITIONS
18 #
19 print2stringsIncolor () {
20     echo -e "\e[0m${1}\e[1;34m${2}\e[0m"
21 }
22 #
23 print2stringsIncolorERROR () {
24     echo -e "\e[0m${1}\e[1;91m${2}\e[0m\n"
25 }
26 #
27 printIncolor () {
28     echo -e "\e[1;34m${1}\e[0m\n"
29 }
30 #
31 printIncolorERROR () {
32     echo -e "\e[1;91m${1}\e[0m\n"
33 }
34 #
35 #END FUNCTIONS DEFINITIONS
36 #
37 #Folders and files
38 _INPUT_DIR="./output/"
39 _OUTPUT_DIR="./output/"
40 _MASS_RADIUS_FILE=${_OUTPUT_DIR}'starStructureOutput.csv'
41 #
42 #
43 #
44 #
45 _USE_MESSAGE=""
46 Usage: $(basename "$0") [OPTIONS]
47 #
48 #
49 OPTIONS:
50 -o, --outputfile      Sets the Output file, '${_MASS_RADIUS_FILE}' by default.
51 -h, --help            Show this help screen and exits.
52 -V, --version         Show program version and exits.
53 #
54 #
55 _VERSION=$(grep '^# Version ' "$0" | tail -1 | cut -d : -f 1 | tr -d \#)
56 #
57 #Command line arguments
58 case $1 in
59     -o | --outputfile)
60         shift
61         _MASS_RADIUS_FILE=${_OUTPUT_DIR}$1
62         ;;
63     -h | --help)
64         echo "$_USE_MESSAGE"
65         exit 0
66         ;;
67     -V | --version)
68         echo -n $(basename "$0")
69         echo " ${_VERSION}"
70         exit 0
71         ;;
72     *)
73         ;;
74 esac
75 #
76 #Patterns
77 rhoPattern=" RHO_0"
78 pressurePattern="P_0"
79 radiusPattern="Star Radius (km)"
80 massPattern="Star Mass (Solar Units)"
81 infoEntropyPattern="Information Entropy"
82 diseqPattern="Disequilibrium"
83 complexityPattern="Complexity"
84 #
85 #

```

```

printlncolor "\n\
n-----"
87 printlncolor "----- TOV Solver Mass/Radius Extractor ${_VERSION}
printlncolor "
-----"
89
91 print2stringslncolor "Output folder: " "'${_OUTPUT_DIR}'."
print2stringslncolor "Output file : " "'${_MASS_RADIUS_FILE}'."
93
#Replaces the INTERNAL FIELD SEPARATOR, but storing a copy first
95 OLD_IFS=$IFS
IFS=':'
97
echo "#central density, central pressure, radius, mass, information entropy,
disequilibrium, complexity" > $_MASS_RADIUS_FILE
99
for _FILE_NAME in ${_INPUT_DIR}*.txt; do
101
print2stringslncolor "Processing file " "'$_FILE_NAME'";
103 while read line; do
105
# TODO: improve these snippet of code.
# The fields must be in that order,
# otherwise the parser won't work.
107 if [[ "$line" == *$rhoPattern* ]]
109 then
arr=($line)
111 rho_0=${arr[1]}
elif [[ "$line" == *$pressurePattern* ]]
113 then
arr=($line)
115 p_0=${arr[1]}
elif [[ "$line" == *$radiusPattern* ]]
117 then
arr=($line)
119 radius=${arr[1]}
elif [[ "$line" == *$massPattern* ]]
121 then
arr=($line)
123 mass=${arr[1]}
elif [[ "$line" == *$infoEntropyPattern* ]]
125 then
arr=($line)
127 infoEntropy=${arr[1]}
elif [[ "$line" == *$diseqPattern* ]]
129 then
arr=($line)
131 disequilibrium=${arr[1]}
elif [[ "$line" == *$complexityPattern* ]]
133 then
arr=($line)
135 complexity=${arr[1]}
echo "${rho_0} ${p_0} ${radius} ${mass} ${infoEntropy} ${disequilibrium} ${
complexity}" >> $_MASS_RADIUS_FILE
137 fi
done < "$_FILE_NAME"
139
done
141
143 #Restoring the INTERNAL FIELD SEPARATOR
IFS=$OLD_IFS
145
echo "End of processing."
147
echo "Processing output figure with Gnuplot..."
149 gnuplot massaRaio.gnuplot
echo "Done."
151
#evince massaRaio.eps

```

./programs/tovsolver/src/scripts/tovsolver-genoutput.sh

## Arquivo de configuração

```
1 # TOV solver parameters.
2 # File generated by config.generator.py.
3
4
5 #Fixed parameters, units-system independent.
6 output_summary_only=false
7 verbose_eos=false
8 verbose_interpolation_coefficients=false
9 max_rk_steps=40000000
10 diff_eq_step=0.00005
11 output_gnuplot_style=false
12 eos_file_provides_baryonic_density=false
13
14 interpolation_tolerance=0.00001
15 max_diff_eq_step=0.00025
16 min_diff_eq_step=0.00005
17
18 #accepted parameters: cubic_spline, linear
19 interpolation_method=cubic_spline
20
21 #eos_file_name expected to be COMMA separated values
22 eos_file_name=EOS.csv
23
24
25 #Parameters dependent on units.
26 RHO_0=0.10460E-07
27
28 #cutoff_RHO_0=2000
29
30 cutoff_density=3.47712e-10
31
32 #UNIT_SYSTEM = (CGS=1, NUCLEAR=2, SI=3, NUN=4, OUTRO=5)
33 #If UNIT_SYSTEM = 5 were chosen, G and C must be provided. TODO
34 UNIT_SYSTEM=2
35
36 K_entropy=8.89e-7
```

./programs/tovsolver/src/scripts/tovsolver-template.conf

## Programas em Fortran

```

1  !-----
3  ! RAdS Jan12.
4  ! Copyright (C) 2011–2014 by Rodrigo Alvares de Souza.
5  ! Mail: <rsouza01@gmail.com>. Web: "http://www.astro.iag.usp.br/~rsouza/".
6  ! This program may be copied and/or distributed freely. See the
7  ! - terms and conditions in the files in the doc/ subdirectory.
8  !-----
9  ! PROGRAM: TOV_Solver
10 !
11 ! MODULE: stellar_structure_solver
12 !
13 !> @author
14 !> Rodrigo Souza
15 !-----
16 ! DESCRIPTION:
17 !> Implements a generic framework for a TOV system.
18 !-----
21 !
22 program stellar_structure_solver
23
24 use config_module
25 use solver_module
26
27 implicit none
28
29 type(ConfigParameters) :: parameters
30 type(CommandLineParameters) :: cl_parameters
31 integer :: error
32
33 parameters%RHO_0 = 0
34 cl_parameters%RHO_0 = 0
35 parameters%P_0_bar = 0.
36
37 call get_command_line_parameters(cl_parameters, error)
38
39 !Exits the program returning the error
40 if (error /= 0) then
41     call exit(error)
42 end if
43
44 parameters%RHO_0 = cl_parameters%RHO_0
45
46 call read_config(cl_parameters, parameters, error)
47 !Exits the program returning the error
48 if (error /= 0) then
49     call exit(error)
50 end if
51
52 call print_init(cl_parameters, parameters, error)
53
54 call process_calculations(parameters, error)
55
56 !call process_calculations_variable_step_size(parameters, error)
57
58 !Exits the program returning the error
59 if (error /= 0) then
60     call exit(error)
61 end if
62
63 call unload_eos_table(cl_parameters, parameters)
64
65 end program stellar_structure_solver

```

./programs/tovsolver/src/tovsolver/stellar\_structure\_solver.f90

```

2  !
3  ! RAdS Jan12.
4  ! Copyright (C) 2011–2014 by Rodrigo Alvares de Souza.
5  ! Mail: <rsouza01@gmail.com>. Web: "http://www.astro.iag.usp.br/~rsouza/".
6  ! This program may be copied and/or distributed freely. See the
7  ! - terms and conditions in the files in the doc/ subdirectory.
8  !
9  ! MODULE: config_module
10 !
11 !> @author
12 !> Rodrigo Souza
13 !
14 ! DESCRIPTION:
15 !> Configuration related routines
16 !
17 !
18 !
19 !
20 module config_module
21 use global_constants
22 use types
23 use output_module
24 use cubic_spline_module
25 use linked_list_module
26
27 implicit none
28
29 contains
30
31 !-----
32 ! DESCRIPTION:
33 !> Get command line parameters
34 !-----
35 subroutine get_command_line_parameters(cl_parameters , error)
36 implicit none
37
38 type(CommandLineParameters) :: cl_parameters
39 integer , intent(out):: error
40 integer :: countArgs
41 character(len=32) :: argument
42 logical :: has_config_file= .false.
43
44 write (*,'(A)') '
45 #-----
46 write (*,'(A)') '# TOV Solver '
47
48 !if (iargc() < 1) then
49 !write (*,'(A)') 'Usage mode: tovsolver <-config=config_file_name -rho_0=9.9D
+9>'
50 !write (*,'(A)') '<AAAAA> - optional parameters '
51 !error = -1
52 !write (*,'(A)') 'Using default config file = tovsolver.conf'
53
54 !else
55 do countArgs = 1, iargc()
56 call getarg(countArgs , argument)
57
58 if (argument(1:7) == '-config') then
59
60 cl_parameters%parameter_file = argument(9:)
61 has_config_file = .true.
62
63 else if (argument(1:6) == '-rho_0') then
64
65 read(argument(8:),*) cl_parameters%RHO_0
66
67 end if
68 end do
69 !end if
70
71 if(has_config_file .eqv. .false. ) then
72 cl_parameters%parameter_file = 'tov_solver.conf'
73 end if
74
75 error = 0
76
77 end subroutine get_command_line_parameters
78
79 !-----
80 ! DESCRIPTION:
81 !> Print in the screen the initialization of the system
82 !-----

```

```

84  subroutine print_init(cl_parameters, parameters, error)
85      implicit none
86
87      type(ConfigParameters), intent(in) :: parameters
88      type(CommandLineParameters), intent(in) :: cl_parameters
89      integer, intent(out) :: error
90
91      call print_config(cl_parameters, parameters)
92
93      error = 0
94
95  end subroutine print_init
96
97
98  !-----
99  ! DESCRIPTION:
100 !> Read the config from the file specified in the command line
101 !-----
102
103 subroutine read_config(cl_parameters, parameters, error)
104     implicit none
105
106     type(CommandLineParameters) :: cl_parameters
107     type(ConfigParameters) :: parameters
108     integer, intent(out) :: error
109
110     ! Input related variables
111     character(len=100) :: buffer, label, interpolation_method
112     integer :: pos
113     integer, parameter :: fh = 15
114     integer :: ios = 0
115     integer :: line = 0
116     logical :: eos_file_exists
117
118     error = 0
119
120     open(fh, file = cl_parameters%parameter_file)
121
122     ! ios is negative if an end of record condition is encountered or if
123     ! an endfile condition was detected. It is positive if an error was
124     ! detected. ios is zero otherwise.
125
126     do while (ios == 0)
127         read(fh, '(A)', iostat=ios) buffer
128         if (ios == 0) then
129             line = line + 1
130
131             ! Find the first instance of =. Split label and data.
132             pos = scan(buffer, '=')
133             label = buffer(1:pos)
134             buffer = buffer(pos+1:)
135
136             select case (label)
137                 case ('diff_eq_step=')
138                     read(buffer, *, iostat=ios) parameters%diff_eq_step
139                 case ('max_rk_steps=')
140                     read(buffer, *, iostat=ios) parameters%max_rk_steps
141                 case ('interpolation_tolerance=')
142                     read(buffer, *, iostat=ios) parameters%interpolation_tolerance
143                 case ('max_diff_eq_step=')
144                     read(buffer, *, iostat=ios) parameters%max_diff_eq_step
145                 case ('min_diff_eq_step=')
146                     read(buffer, *, iostat=ios) parameters%min_diff_eq_step
147
148                 case ('verbose_eos=')
149                     read(buffer, *, iostat=ios) parameters%verbose_eos
150                 case ('output_summary_only=')
151                     read(buffer, *, iostat=ios) parameters%output_summary_only
152                 case ('output_gnuplot_style=')
153                     read(buffer, *, iostat=ios) parameters%output_gnuplot_style
154                 case ('verbose_interpolation_coefficients=')
155                     read(buffer, *, iostat=ios) parameters%
156 verbose_interpolation_coefficients
157
158                 case ('RHO_0=')
159
160                     if (parameters%RHO_0 <= 0.0) then
161                         read(buffer, *, iostat=ios) parameters%RHO_0
162                     end if
163
164                 case ('interpolation_method=')
165                     read(buffer, *, iostat=ios) interpolation_method
166
167                     if(interpolation_method == 'cubic_spline') then
168                         parameters%INTERPOLATION_METHOD = IDX_CUBIC_SPLINE;
169                     else if(interpolation_method == 'linear') then

```

```

170         parameters%INTERPOLATION_METHOD = IDX_LINEAR;
172     end if
174     case ('RHO_ADIM=')
176         read(buffer, *, iostat=ios) parameters%RHO_ADIM
178     case ('cutoff_RHO_0=')
180         read(buffer, *, iostat=ios) parameters%cutoff_RHO_0
182     case ('cutoff_density=')
184         read(buffer, *, iostat=ios) parameters%cutoff_density
186     case ('K_entropy=')
188         read(buffer, *, iostat=ios) parameters%K_entropy
190     case ('eos_file_name=')
192         read(buffer, *, iostat=ios) parameters%eos_file_name
194     case ('UNIT_SYSTEM=')
196         read(buffer, *, iostat=ios) parameters%UNIT_SYSTEM
198     case ('eos_file_provides_baryonic_density=')
200         read(buffer, *, iostat=ios) parameters%
eos_file_provides_baryonic_density
202     case ('log_base_calc_infor_entropy=')
204         read(buffer, *, iostat=ios) parameters%log_base_calc_infor_entropy
206     end select
208 end if
210 end do
212 if(parameters%RHO_0 <= 0.0) then
214     write(*, '(A)') '
#
216     write(*, '(A)') '# ERROR: An initial RHO_0 must be provided, either by command
line parameters or via config file.'
218     write(*, '(A)') '# SOLUTION: Set the RHO_0 parameter in the file ',
cl_parameters%parameter_file, &
220     ' or in the command line, and try again.'
222     write(*, '(A)') '
#
224     error = -2
226     return
228 end if
230 !Checks for EoS File
232 inquire(file=parameters%eos_file_name, exist=eos_file_exists)
234 if(eos_file_exists .eqv. .false.) then
236     write(*, '(A)') '
#
238     write(*, '(A)') '# ERROR: EoS file not found.'
240     write(*, '(A)') '# SOLUTION: Set the correct eos_file-name parameter in the
file ', cl_parameters%parameter_file, &
242     ' or in the command line, and try again.'
244     write(*, '(A)') '
#
246     error = -3
248     return
250 end if
252 if(parameters%RHO_ADIM <= 0.0) then
254     parameters%RHO_ADIM = parameters%RHO_0
256 end if
258 parameters%scale_radius = ((LIGHT_SPEED_SCALE(parameters%UNIT_SYSTEM)**2.) / (4. *
const_pi * &
260 GRAVITATIONAL_CONSTANT(parameters%UNIT_SYSTEM) * parameters%RHO_ADIM))**(.5)
262 parameters%scale_mass = 4. * const_pi * parameters%RHO_ADIM * parameters%
scale_radius**3.
264 call load_eos_table(cl_parameters, parameters);
266 !DEBUG Purposes only.
268 !call print_eos_table(cl_parameters, parameters);
270

```

```

242     call generate_interpolation_values(cl_parameters, parameters)
244     parameters%ENERGY_DENSITY_0 = parameters%RHO_ADIM * LIGHT_SPEED(parameters%
UNIT_SYSTEM)**2.
246     parameters%BARYONIC_DENSITY_0_bar = barionic_density_from_eos_table(parameters,
parameters%RHO_0 / parameters%RHO_ADIM);
248     parameters%cutoff_density_bar = parameters%cutoff_density / parameters%RHO_ADIM;
250     !DEBUG
252     !write (*,*) 'parameters%RHO_ADIM => ', parameters%RHO_ADIM
254     !write (*,*) 'cutoff_density => ', parameters%cutoff_density
256     !write (*,*) 'cutoff_density_bar => ', parameters%cutoff_density_bar
258     parameters%P_0_bar = pressure_from_eos_table(parameters, parameters%RHO_0 /
parameters%RHO_ADIM);
260     parameters%P_0 = parameters%P_0_bar * &
parameters%RHO_0 * LIGHT_SPEED(parameters%UNIT_SYSTEM)**2;
262 end subroutine read_config
264 !> \brief Load in memory the values from the EoS Table.
266 !!!
268 !! \param cl_parameters
270 !! \param parameters
272 subroutine load_eos_table(cl_parameters, parameters)
274 implicit none
276 type(CommandLineParameters), intent(in) :: cl_parameters
278 type(ConfigParameters), intent(inout) :: parameters
280 ! Input related variables
282 character(len=50) :: eosFileName
284 character(len=100) :: buffer
286 integer :: pos_1, pos_2
288 integer, parameter :: fh = 16
290 integer :: ios = 0
292 integer :: line = 0
294 double precision :: rho = 0., pressure = 0., baryon_density = 0.
296 Type(EquationOfStateValue), pointer :: eos_element
298 eosFileName = trim(parameters%eos_file_name)
300 call ll_allocate(parameters%first_element)
302 parameters%curr_element => parameters%first_element
304 eos_element => parameters%first_element
306 open(fh, file = eosFileName)
308 do while (ios == 0)
310     read(fh, '(A)', iostat=ios) buffer
312     if (ios == 0) then
314         if_sharp : if (buffer(1:1) /= "#" .and. buffer(1:1) /= ")") then
316             ! Find the first instance of ', '. Split pressure and rho.
318             pos_1 = scan(buffer, ',')
320             read(buffer(1:pos_1), *, iostat=ios) rho
322             if (parameters%eos_file_provides_baryonic_density) then
324                 pos_2 = scan(buffer(pos_1 + 1:), ',')
326                 read(buffer(pos_1 + 1: pos_1 + pos_2), *, iostat=ios) pressure
328                 read(buffer(pos_1 + pos_2 + 1:), *, iostat=ios) baryon_density
330             else
332                 read(buffer(pos_1 + 1:), *, iostat=ios) pressure
334                 baryon_density = 0.
336             end if
338             !DEBUG
340             !write (*,*) 'rho, pressure, baryon_density => ', rho, ', ', pressure,
', ', baryon_density

```



```

324         !call ll_insert_ordered(parameters%first_element , )
326         allocate ( eos_element%next_element )
328         eos_element%next_element%previous_element => eos_element
330         eos_element%rho = rho
332         if ( eos_element%rho > parameters%RHO_0 ) then
333             parameters%first_element => eos_element
334             if ( associated ( eos_element%previous_element ) ) then
335                 deallocate ( eos_element%previous_element )
336                 nullify ( eos_element%previous_element )
337             end if
338         end if
340         !write (*,*) 'eos_element%rho, parameters%RHO_0, eos_element%rho -
parameters%RHO_0 = ', &
342         ! eos_element%rho, parameters%RHO_0, ( eos_element%rho - parameters%
RHO_0)
344         !DEBUG
345         !write (*,*) 'first -> rho, pressure, baryon_density => ', parameters%
first_element%rho, &
346         ! ', ', parameters%first_element%pressure, ', ', parameters%
first_element%baryonic_number_density
348         !BLOCK
349         line = line + 1
351         eos_element%rho_bar = &
352         eos_element%rho / parameters%RHO_ADIM
354         eos_element%pressure = pressure
356         !write (*,*) 'eos_element%rho, parameters%RHO_0, eos_element%rho -
parameters%RHO_0 = ', &
358         ! eos_element%rho, parameters%RHO_0, ( eos_element%rho - parameters%
RHO_0)
360         eos_element%pressure_bar = &
361         eos_element%pressure / ( parameters%RHO_ADIM * LIGHT_SPEED(
parameters%UNIT_SYSTEM) **2.)
362         eos_element%baryonic_number_density = baryon_density
364         if ( parameters%eos_file_provides_baryonic_density ) then
366             if ( parameters%BARYONIC_DENSITY_0 <= 0.0 ) then
367                 parameters%BARYONIC_DENSITY_0 = parameters%first_element%
baryonic_number_density;
368             end if
369             eos_element%baryonic_number_density_bar = baryon_density / &
370             parameters%BARYONIC_DENSITY_0;
372         else
373             parameters%BARYONIC_DENSITY_0 = 0;
374             eos_element%baryonic_number_density_bar = 0;
375         end if
376         !These parameter must be initialized somewhere
378         eos_element%idx_j = line
380         eos_element%BARYON_DENSITY_FROM_RHO%cx = eos_element%rho_bar;
eos_element%BARYON_DENSITY_FROM_RHO%ca = eos_element%
baryonic_number_density_bar;
382         eos_element%RHO_FROM_BARYON_DENSITY%cx = eos_element%
baryonic_number_density_bar;
eos_element%RHO_FROM_BARYON_DENSITY%ca = eos_element%rho_bar;
384         eos_element%RHO_FROM_PRESSURE%cx = eos_element%pressure_bar
eos_element%RHO_FROM_PRESSURE%ca = eos_element%rho_bar
386         eos_element%PRESSURE_FROM_RHO%cx = eos_element%rho_bar
eos_element%PRESSURE_FROM_RHO%ca = eos_element%pressure_bar
388         !BLOCK
390         parameters%last_element => eos_element
392         eos_element => eos_element%next_element
394
396     end if if_sharp !if ( buffer(1:1) /= "#") then ...

```

```
398         end if ! if (ios == 0) then...
400     end do
402     nullify(parameters%first_element%previous_element)
404 end subroutine load_eos_table
406 !> \brief Free the memory allocated
407 !!
408 !! \param cl_parameters
409 !! \param parameters
410 !!
411 subroutine unload_eos_table(cl_parameters, parameters)
412     implicit none
413     type(CommandLineParameters), intent(in) :: cl_parameters
414     type(ConfigParameters), intent(in) :: parameters
415
416     Type(EquationOfStateValue), pointer :: eos_element, temp_element
417
418     eos_element => parameters%first_element
419
420     do while (associated(eos_element))
421
422         temp_element => eos_element
423         eos_element => eos_element%next_element
424         deallocate(temp_element)
425
426     end do
427 end subroutine unload_eos_table
428
429
430 end module config_module
```

./programs/tovsolver/src/tovsolver/config\_module.f90

```

1 |-----
3 | RAdS Jan12.
4 | Copyright (C) 2011–2014 by Rodrigo Alvares de Souza.
5 | Mail: <rsouza01@gmail.com>. Web: "http://www.astro.iag.usp.br/~rsouza/".
6 | This program may be copied and/or distributed freely. See the
7 | - terms and conditions in the files in the doc/ subdirectory.
9 |
10 | MODULE: cubic_spline_module
11 |
12 | > @author
13 | > Rodrigo Souza
14 |
15 | DESCRIPTION:
16 | > Interpolation related routines
17 |-----
19 | module cubic_spline_module
20 | use global_constants
21 | use types
22 |
23 |     implicit none
24 |
25 |     contains
26 |
27 |     !> \brief Evaluates the 3rd order polynomial to interpolate \rho(P)
28 |     !!
29 |     !! \param eos_element
30 |     !! \param pressure_bar
31 |     !! \return
32 |     !!
33 |     double precision function interpolation_pressure_from_eos(parameters, eos_element,
34 | rho_bar)
35 |         type(ConfigParameters), intent(in) :: parameters
36 |         type(EquationOfStateValue), pointer, intent(in) :: eos_element
37 |         double precision, intent(in) :: rho_bar
38 |
39 |         double precision :: delta_x_bar
40 |
41 |         type(InterpolationStepValue), pointer :: isv
42 |
43 |         isv => eos_element%PRESSURE_FROM_RHO
44 |
45 |         if(parameters%INTERPOLATION_METHOD == IDX_CUBIC_SPLINE) then
46 |
47 |             delta_x_bar = rho_bar - isv%x
48 |
49 |             interpolation_pressure_from_eos = isv%a + isv%b * delta_x_bar + &
50 |                 isv%c * delta_x_bar**2. + isv%d * delta_x_bar**3.
51 |
52 |         else if(parameters%INTERPOLATION_METHOD == IDX_LINEAR) then
53 |
54 |             interpolation_pressure_from_eos = isv%a*(rho_bar - eos_element%rho_bar) + isv%
55 | b
56 |         end if
57 |
58 |         !write (*, *) '(interpolation_pressure_from_eos ) = (',
59 | interpolation_pressure_from_eos, ')';
60 |
61 |     end function interpolation_pressure_from_eos
62 |
63 |     !> \brief Evaluates the 3rd order polynomial to interpolate \rho(P)
64 |     !!
65 |     !! \param eos_element
66 |     !! \param pressure_bar
67 |     !! \return
68 |     !!
69 |     double precision function interpolation_baryonic_density_from_eos(parameters,
70 | eos_element, rho_bar)
71 |         type(ConfigParameters), intent(in) :: parameters
72 |         type(EquationOfStateValue), pointer, intent(in) :: eos_element
73 |         double precision, intent(in) :: rho_bar
74 |         double precision :: delta_x_bar
75 |
76 |         type(InterpolationStepValue), pointer :: isv
77 |
78 |         isv => eos_element%BARYON_DENSITY_FROM_RHO
79 |
80 |         if(parameters%INTERPOLATION_METHOD == IDX_CUBIC_SPLINE) then
81 |
82 |             delta_x_bar = rho_bar - isv%x

```

```

83         interpolation_baryonic_density_from_eos = isv%a + isv%b * delta_x_bar + &
84             isv%c * delta_x_bar**2. + isv%d * delta_x_bar**3.
85
86     else if(parameters%INTERPOLATION_METHOD == IDX_LINEAR) then
87
88         interpolation_baryonic_density_from_eos = isv%a*(rho_bar - eos_element%rho_bar
89 ) + isv%b
90     end if
91
92     !write (*, *) '(interpolation_pressure_from_eos ) = (',
93 interpolation_pressure_from_eos, ')';
94
95 end function interpolation_baryonic_density_from_eos
96
97 !-----
98 ! DESCRIPTION:
99 !> Evaluates the baryonic number density at a given energy density
100 !> Compute \f$ P \f$
101 !-----
102 double precision function barionic_density_from_eos_table(parameters, dimless_rho)
103 implicit none
104     type(ConfigParameters), intent(in) :: parameters
105     double precision, intent(in) :: dimless_rho
106
107     type(EquationOfStateValue), pointer :: eos_value
108     double precision :: bar_density_bar
109
110     eos_value => parameters%first_element
111
112     !DEBUG
113     !write (*,*) '(dimless_rho, eos_value%rho_bar) = ', '( ', &
114         !     dimless_rho, ', ', &
115         !     eos_value%rho_bar, ' )';
116
117     do while (associated(eos_value%next_element) .and. .not. (dimless_rho <=
118 eos_value%rho_bar .and. &
119         dimless_rho >= eos_value%next_element%rho_bar))
120
121         !write (*,*) '(dimless_rho, eos_value%rho_bar) = ', '( ', &
122             !     dimless_rho, ', ', &
123             !     eos_value%rho_bar, ' )';
124
125         eos_value => eos_value%next_element
126     end do
127
128     bar_density_bar = interpolation_baryonic_density_from_eos(parameters, eos_value,
129 dimless_rho)
130
131     barionic_density_from_eos_table = bar_density_bar
132
133 end function barionic_density_from_eos_table
134
135 !-----
136 ! DESCRIPTION:
137 !> Evaluates the pressure P at a given density
138 !> Compute \f$ P \f$
139 !-----
140 double precision function pressure_from_eos_table(parameters, dimless_rho)
141 implicit none
142     type(ConfigParameters), intent(in) :: parameters
143     double precision, intent(in) :: dimless_rho
144
145     type(EquationOfStateValue), pointer :: eos_value
146     double precision :: pressure_bar
147
148     eos_value => parameters%first_element
149
150     !DEBUG
151     !write (*,*) '(dimless_rho, eos_value%rho_bar) = ', '( ', &
152         !     dimless_rho, ', ', &
153         !     eos_value%rho_bar, ' )';
154
155     do while (.not. (dimless_rho <= eos_value%rho_bar .and. &
156         dimless_rho >= eos_value%next_element%rho_bar))
157
158         eos_value => eos_value%next_element
159     end do
160
161     !-----

```

```

163     )   pressure_bar = interpolation_pressure_from_eos ( parameters , eos_value , dimless_rho
164     )
165     pressure_from_eos_table = pressure_bar
166
167 end function pressure_from_eos_table
168
169 !-----
170 double precision function cs_h(current , next)
171 implicit none
172 type(InterpolationStepValue), intent(in) :: current , next
173
174     cs_h = next%x - current%x
175
176 end function cs_h
177
178 !-----
179 double precision function linear_a(x1, y1, x2, y2)
180 implicit none
181 double precision , intent(in) :: x1, x2, y1, y2;
182
183     linear_a = (y2 - y1)/(x2 - x1);
184
185 end function linear_a
186
187 !-----
188 double precision function linear_b(x1, y1, x2, y2)
189 implicit none
190 double precision , intent(in) :: x1, x2, y1, y2;
191
192     linear_b = y1
193
194 end function linear_b
195
196 !-----
197 double precision function cs_alpha(previous , current , next)
198 implicit none
199 type(InterpolationStepValue), intent(in) :: previous , current , next
200 double precision :: alpha
201
202     if(current%h /= 0. .and. previous%h /= 0.) then
203         alpha = (3. / current%h) * (next%a - current%a) - (3. / previous%h) * (current
204 %a - previous%a);
205     else
206         alpha = 0.
207     end if
208
209     !write (*,*) '(alpha) = ', '( ', alpha, ' )';
210
211     cs_alpha = alpha;
212
213 end function cs_alpha
214
215 !-----
216 double precision function cs_l(previous , next)
217 implicit none
218 type(InterpolationStepValue), intent(in) :: previous , next
219
220     cs_l = 2. * (next%x - previous%x) - previous%h * previous%mu;
221
222 end function cs_l
223
224 !-----
225 double precision function cs_mu(current)
226 implicit none
227 type(InterpolationStepValue), intent(in) :: current
228
229     if(current%h /= 0.) then
230         cs_mu = current%h - current%l;
231     else
232         cs_mu = 0
233     end if
234
235 end function cs_mu
236
237 !-----
238 double precision function cs_z(previous , current)
239 implicit none
240 type(InterpolationStepValue), intent(in) :: previous , current
241
242     if(current%h /= 0.) then
243         cs_z = (current%alpha - previous%h * previous%z)/current%l;
244     else
245         cs_z = 0
246     end if
247
248 end function cs_z

```

```

249 | !-----
251 | double precision function cs_coeficient_c(current, next)
253 | implicit none
255 | type(InterpolationStepValue), intent(in) :: current, next
257 |     if(current%h /= 0.) then
259 |         cs_coeficient_c = current%z - current%mu * next%c;
261 |     else
263 |         cs_coeficient_c = 0;
265 |     end if
267 | end function cs_coeficient_c
269 | !-----
271 | double precision function cs_coeficient_b(current, next)
273 | implicit none
275 | type(InterpolationStepValue), intent(in) :: current, next
277 |     if(current%h /= .0) then
279 |         cs_coeficient_b = (next%a - current%a) / current%h - &
281 |             current%h * (next%c + 2. * current%c) / 3.
283 |     else
285 |         cs_coeficient_b = 0
287 |     end if
289 | end function cs_coeficient_b
291 | !-----
293 | double precision function cs_coeficient_d(current, next)
295 | implicit none
297 | type(InterpolationStepValue), intent(in) :: current, next
299 |     if(current%h /= 0.) then
301 |         cs_coeficient_d = (next%c - current%c) / (3. * current%h)
303 |     else
305 |         cs_coeficient_d = 0
307 |     end if
309 | end function cs_coeficient_d
311 | !-----
313 | ! DESCRIPTION:
315 | !> Maybe later...
317 | !-----
319 | subroutine generate_interpolation_values(cl_parameters, parameters)
321 | implicit none
323 | type(CommandLineParameters), intent(in) :: cl_parameters
325 | type(ConfigParameters), intent(in) :: parameters
327 |
329 | if(parameters%INTERPOLATION_METHOD == IDX_CUBIC_SPLINE) then
331 |     call generate_cubic_spline_interpolation_values(cl_parameters, parameters)
333 | else if(parameters%INTERPOLATION_METHOD == IDX_LINEAR) then
335 |     call generate_linear_interpolation_values(cl_parameters, parameters)
337 | else
339 |     call generate_linear_interpolation_values(cl_parameters, parameters)
341 | end if
343 | end subroutine generate_interpolation_values
345 | !-----
347 | ! DESCRIPTION:
349 | !> Maybe later...
351 | !-----
353 | subroutine generate_cubic_spline_interpolation_values(cl_parameters, parameters)
355 | implicit none
357 | type(CommandLineParameters), intent(in) :: cl_parameters
359 | type(ConfigParameters), intent(in) :: parameters
361 |
363 | Type(EquationOfStateValue), pointer :: eos_element
365 |
367 | !STEP 1 - OK!
369 | eos_element => parameters%first_element
371 |
373 | do while (associated(eos_element%next_element%next_element))
375 |
377 |     eos_element%RHO_FROM_PRESSURE%h = &
379 |         cs_h(eos_element%RHO_FROM_PRESSURE, eos_element%next_element%
381 | RHO_FROM_PRESSURE)
383 |
385 |     eos_element%PRESSURE_FROM_RHO%h = &
387 |         cs_h(eos_element%PRESSURE_FROM_RHO, eos_element%next_element%
389 | PRESSURE_FROM_RHO)

```

```

333     eos_element%RHO_FROM_BARYON_DENSITY%h = &
        cs_h(eos_element%RHO_FROM_BARYON_DENSITY, eos_element%next_element%
RHO_FROM_BARYON_DENSITY)
335
337     eos_element%BARYON_DENSITY_FROM_RHO%h = &
        cs_h(eos_element%BARYON_DENSITY_FROM_RHO, eos_element%next_element%
BARYON_DENSITY_FROM_RHO)
339
341     !DEBUG
        !write (*,*) '(j, RHO_FROM_PRESSURE%h, PRESSURE_FROM_RHO%h) = ', '( ', &
        ! eos_element%idx_j, ', ', &
343     ! eos_element%RHO_FROM_PRESSURE%h, ', ', &
        ! eos_element%PRESSURE_FROM_RHO%h, ')';
345
347     eos_element => eos_element%next_element
349
351 !STEP 2
        eos_element => parameters%first_element%next_element
353     do while (associated(eos_element%next_element%next_element))
355
357         eos_element%RHO_FROM_PRESSURE%alpha = &
            cs_alpha(eos_element%previous_element%RHO_FROM_PRESSURE, &
            eos_element%RHO_FROM_PRESSURE, &
            eos_element%next_element%RHO_FROM_PRESSURE)
359
361         eos_element%PRESSURE_FROM_RHO%alpha = &
            cs_alpha(eos_element%previous_element%PRESSURE_FROM_RHO, &
            eos_element%PRESSURE_FROM_RHO, &
            eos_element%next_element%PRESSURE_FROM_RHO)
363
365         eos_element%RHO_FROM_BARYON_DENSITY%alpha = &
            cs_alpha(eos_element%previous_element%RHO_FROM_BARYON_DENSITY, &
            eos_element%RHO_FROM_BARYON_DENSITY, &
            eos_element%next_element%RHO_FROM_BARYON_DENSITY)
367
369         eos_element%BARYON_DENSITY_FROM_RHO%alpha = &
            cs_alpha(eos_element%previous_element%BARYON_DENSITY_FROM_RHO, &
            eos_element%BARYON_DENSITY_FROM_RHO, &
            eos_element%next_element%BARYON_DENSITY_FROM_RHO)
371
373         !DEBUG
        !write (*,*) '(j, R_FROM_P%alpha, P_FROM_R%alpha) = ', '( ', &
375         ! eos_element%idx_j, ', ', &
        ! eos_element%RHO_FROM_PRESSURE%alpha, ', ', &
377         ! eos_element%PRESSURE_FROM_RHO%alpha, ')';
379
381         eos_element => eos_element%next_element
383
385     end do
387
389 !STEP 3
        parameters%first_element%RHO_FROM_PRESSURE%l = 1.
        parameters%first_element%PRESSURE_FROM_RHO%l = 1.
391
        parameters%first_element%RHO_FROM_PRESSURE%z = 0.
        parameters%first_element%PRESSURE_FROM_RHO%z = 0.
393
        parameters%first_element%RHO_FROM_PRESSURE%c = 0.
        parameters%first_element%PRESSURE_FROM_RHO%c = 0.
395
        parameters%first_element%RHO_FROM_BARYON_DENSITY%l = 1.
        parameters%first_element%BARYON_DENSITY_FROM_RHO%l = 1.
        parameters%first_element%RHO_FROM_BARYON_DENSITY%z = 0.
        parameters%first_element%BARYON_DENSITY_FROM_RHO%z = 0.
        parameters%first_element%RHO_FROM_BARYON_DENSITY%c = 0.
        parameters%first_element%BARYON_DENSITY_FROM_RHO%c = 0.
399
401 !STEP 4 - OK
        eos_element => parameters%first_element%next_element
403
405     do while (associated(eos_element%next_element%next_element))
407
409         ! Let's calculate 'l'
        eos_element%RHO_FROM_PRESSURE%l = &
            cs_l(eos_element%previous_element%RHO_FROM_PRESSURE, eos_element%
            next_element%RHO_FROM_PRESSURE)
        eos_element%PRESSURE_FROM_RHO%l = &
            cs_l(eos_element%previous_element%PRESSURE_FROM_RHO, eos_element%
            next_element%PRESSURE_FROM_RHO)
411
        eos_element%RHO_FROM_BARYON_DENSITY%l = &

```

```

413     cs_l(eos_element%previous_element%RHO_FROM_BARYON_DENSITY, eos_element%
next_element%RHO_FROM_BARYON_DENSITY)
    eos_element%BARYON_DENSITY_FROM_RHO%l = &
415     cs_l(eos_element%previous_element%BARYON_DENSITY_FROM_RHO, eos_element%
next_element%BARYON_DENSITY_FROM_RHO)

417     !DEBUG
    !write (*,*) '(j, R_FROM_P%l, P_FROM_R%l) = ', '( ', &
419     ! eos_element%idx_j, ', ', &
    ! eos_element%RHO_FROM_PRESSURE%l, ', ', &
421     ! eos_element%PRESSURE_FROM_RHO%l, ')';

423
    ! Now calculate 'mu'
425     eos_element%RHO_FROM_PRESSURE%mu = cs_mu(eos_element%RHO_FROM_PRESSURE)
    eos_element%PRESSURE_FROM_RHO%mu = cs_mu(eos_element%PRESSURE_FROM_RHO)
427
    eos_element%RHO_FROM_BARYON_DENSITY%mu = cs_mu(eos_element%
RHO_FROM_BARYON_DENSITY)
429     eos_element%BARYON_DENSITY_FROM_RHO%mu = cs_mu(eos_element%
BARYON_DENSITY_FROM_RHO)

431     !DEBUG
    !write (*,*) '(j, R_FROM_P%mu, P_FROM_R%mu) = ', '( ', &
433     ! eos_element%idx_j, ', ', &
    ! eos_element%RHO_FROM_PRESSURE%mu, ', ', &
435     ! eos_element%PRESSURE_FROM_RHO%mu, ')';

437     ! And now 'z'
    eos_element%RHO_FROM_PRESSURE%z = &
439     cs_z(eos_element%previous_element%RHO_FROM_PRESSURE, eos_element%
RHO_FROM_PRESSURE)

441     eos_element%PRESSURE_FROM_RHO%z = &
    cs_z(eos_element%previous_element%PRESSURE_FROM_RHO, eos_element%
PRESSURE_FROM_RHO)
443
    eos_element%RHO_FROM_BARYON_DENSITY%z = &
445     cs_z(eos_element%previous_element%RHO_FROM_BARYON_DENSITY, eos_element%
RHO_FROM_BARYON_DENSITY)

447     eos_element%BARYON_DENSITY_FROM_RHO%z = &
    cs_z(eos_element%previous_element%BARYON_DENSITY_FROM_RHO, eos_element%
BARYON_DENSITY_FROM_RHO)
449

    !DEBUG
451     !write (*,*) '(j, R_FROM_P%z, P_FROM_R%z) = ', '( ', &
    ! eos_element%idx_j, ', ', &
453     ! eos_element%RHO_FROM_PRESSURE%z, ', ', &
    ! eos_element%PRESSURE_FROM_RHO%z, ')';

455
    eos_element => eos_element%next_element
457

end do
459

!STEP 5 - OK
461 eos_element%RHO_FROM_PRESSURE%l = 1.
    eos_element%PRESSURE_FROM_RHO%l = 1.
463 eos_element%RHO_FROM_PRESSURE%z = 0.
    eos_element%PRESSURE_FROM_RHO%z = 0.
465 eos_element%RHO_FROM_PRESSURE%c = 0.
    eos_element%PRESSURE_FROM_RHO%c = 0.
467
    eos_element%RHO_FROM_BARYON_DENSITY%l = 1.
    eos_element%BARYON_DENSITY_FROM_RHO%l = 1.
469 eos_element%RHO_FROM_BARYON_DENSITY%z = 0.
    eos_element%BARYON_DENSITY_FROM_RHO%z = 0.
471 eos_element%RHO_FROM_BARYON_DENSITY%c = 0.
    eos_element%BARYON_DENSITY_FROM_RHO%c = 0.
473

!STEP 6 - OK
475 eos_element => eos_element%previous_element
do while (associated(eos_element))
477
    !Coefficient c
    eos_element%RHO_FROM_PRESSURE%c = &
481     cs_coefficient_c(eos_element%RHO_FROM_PRESSURE, eos_element%next_element%
RHO_FROM_PRESSURE)
    eos_element%PRESSURE_FROM_RHO%c = &
483     cs_coefficient_c(eos_element%PRESSURE_FROM_RHO, eos_element%next_element%
PRESSURE_FROM_RHO)

485
    !Coefficient b
    eos_element%RHO_FROM_PRESSURE%b = &

```



```

487         cs_coeficient_b (eos_element%RHO.FROM.PRESSURE, eos_element%next_element%
RHO.FROM.PRESSURE)
489         eos_element%PRESSURE.FROM.RHO%b = &
         cs_coeficient_b (eos_element%PRESSURE.FROM.RHO, eos_element%next_element%
PRESSURE.FROM.RHO)
491         ! Coeficient d
         eos_element%RHO.FROM.PRESSURE%d = &
493         cs_coeficient_d (eos_element%RHO.FROM.PRESSURE, eos_element%next_element%
RHO.FROM.PRESSURE)
         eos_element%PRESSURE.FROM.RHO%d = &
495         cs_coeficient_d (eos_element%PRESSURE.FROM.RHO, eos_element%next_element%
PRESSURE.FROM.RHO)

         eos_element%RHO.FROM.BARYON.DENSITY%c = &
         cs_coeficient_c (eos_element%RHO.FROM.BARYON.DENSITY, eos_element%
next_element%RHO.FROM.BARYON.DENSITY)
499         eos_element%BARYON.DENSITY.FROM.RHO%c = &
         cs_coeficient_c (eos_element%BARYON.DENSITY.FROM.RHO, eos_element%
next_element%BARYON.DENSITY.FROM.RHO)
501         eos_element%RHO.FROM.BARYON.DENSITY%b = &
503         cs_coeficient_b (eos_element%RHO.FROM.BARYON.DENSITY, eos_element%
next_element%RHO.FROM.BARYON.DENSITY)
         eos_element%BARYON.DENSITY.FROM.RHO%b = &
505         cs_coeficient_b (eos_element%BARYON.DENSITY.FROM.RHO, eos_element%
next_element%BARYON.DENSITY.FROM.RHO)

         eos_element%RHO.FROM.BARYON.DENSITY%d = &
         cs_coeficient_d (eos_element%RHO.FROM.BARYON.DENSITY, eos_element%
next_element%RHO.FROM.BARYON.DENSITY)
509         eos_element%BARYON.DENSITY.FROM.RHO%d = &
         cs_coeficient_d (eos_element%BARYON.DENSITY.FROM.RHO, eos_element%
next_element%BARYON.DENSITY.FROM.RHO)
511         eos_element => eos_element%previous_element
513     end do
515 end subroutine generate_cubic_spline_interpolation_values
517
519 !-----
519 ! DESCRIPTION:
521 !> Maybe later...
521 !-----
523 subroutine generate_linear_interpolation_values (cl_parameters, parameters)
524     implicit none
525     type (CommandLineParameters), intent (in) :: cl_parameters
526     type (ConfigParameters), intent (in) :: parameters
527     Type (EquationOfStateValue), pointer :: eos_element
529     !STEP 1 - OK!
531     eos_element => parameters%first_element
533     do while (associated (eos_element%next_element%next_element))
535         eos_element%RHO.FROM.PRESSURE%a = &
         linear_a (eos_element%pressure_bar, eos_element%rho_bar, &
537         eos_element%next_element%pressure_bar, eos_element%next_element%
rho_bar);
         eos_element%RHO.FROM.PRESSURE%b = &
539         linear_b (eos_element%pressure_bar, eos_element%rho_bar, &
         eos_element%next_element%pressure_bar, eos_element%next_element%
rho_bar);
541         eos_element%PRESSURE.FROM.RHO%a = &
543         linear_a (eos_element%rho_bar, eos_element%pressure_bar, &
         eos_element%next_element%rho_bar, eos_element%next_element%
pressure_bar);
545         eos_element%PRESSURE.FROM.RHO%b = &
         linear_b (eos_element%rho_bar, eos_element%pressure_bar, &
547         eos_element%next_element%rho_bar, eos_element%next_element%
pressure_bar);
549         eos_element%RHO.FROM.BARYON.DENSITY%a = &
         linear_a (eos_element%baryonic_number_density_bar, eos_element%rho_bar, &
551         eos_element%next_element%baryonic_number_density_bar, eos_element%
next_element%rho_bar);
         eos_element%RHO.FROM.BARYON.DENSITY%b = &
553         linear_b (eos_element%baryonic_number_density_bar, eos_element%rho_bar, &
         eos_element%next_element%baryonic_number_density_bar, eos_element%
next_element%rho_bar);
555

```

```

557         eos_element%BARYON.DENSITY.FROM.RHO%a = &
           linear_a(eos_element%rho_bar, eos_element%baryonic_number_density_bar, &
559             eos_element%next_element%rho_bar, eos_element%next_element%
           baryonic_number_density_bar);
           eos_element%BARYON.DENSITY.FROM.RHO%b = &
561             linear_b(eos_element%rho_bar, eos_element%baryonic_number_density_bar, &
           eos_element%next_element%rho_bar, eos_element%next_element%
           baryonic_number_density_bar);

563     eos_element => eos_element%next_element
565     end do
567
569 end subroutine generate_linear_interpolation_values

571 !> \brief Function that interpolate the energy density from a given pressure
573 !! \param parameters
575 !! \param t
577 !! \param Y
579 !! \param V
581 !! \return
583
585 double precision function energy_density_from_eos(parameters, t, Y, V)
587 implicit none
589 type(ConfigParameters), intent(in) :: parameters
591 double precision, intent(in) :: t
593 double precision, intent(in) :: Y(N_DIFF_EQUATIONS)
595 double precision, intent(in) :: V(N_VARIABLES)
597
599 !double precision :: BAG.CONSTANT = 9.23D+034
601
603 !< Must find in the table the correct density
605
607 if(Y(IDX_PRESSURE_BAR) < parameters%last_element%pressure_bar) then
609     energy_density_from_eos = 0.
611 else
613     energy_density_from_eos = density_from_eos_table(parameters, Y(
615     IDX_PRESSURE_BAR))
617 end if
619
621 !Analytic expressions for DEBUG purposes only.
623 !Uncomment if you are testing
625
627 !rho = P/c^2
629 !energy_density_from_eos = V(IDX_PRESSURE_BAR)
631
633 !rho = RHO_0
635 !energy_density_from_eos = 1
637
639 !MIT BAG MODEL
641 !energy_density_from_eos = 3. * V(IDX_PRESSURE_BAR) + 4. * &
643 !     BAG.CONSTANT /((parameters%RHO_0 * LIGHT.SPEED(parameters%UNIT_SYSTEM)**2.)
645
647 end function energy_density_from_eos
649
651 !> \brief Evaluates the 3rd order polynomial to interpolate \rho(P)
653 !!
655 !! \param eos_element
657 !! \param pressure_bar
659 !! \return
661 !!
663 double precision function interpolation_rho_from_eos(parameters, eos_element,
665 pressure_bar)
667 type(ConfigParameters), intent(in) :: parameters
669 type(EquationOfStateValue), pointer, intent(in) :: eos_element
671 double precision, intent(in) :: pressure_bar
673
675 double precision :: delta_x_bar
677
679 type(InterpolationStepValue), pointer :: isv
681
683 double precision :: rho_bar = 0.
685
687 isv => eos_element%RHO_FROM_PRESSURE
689
691 if(parameters%INTERPOLATION_METHOD == IDX_CUBIC_SPLINE) then

```

```

639     delta_x_bar = pressure_bar - isv%x
641     rho_bar = isv%a + isv%b * delta_x_bar + &
        isv%c * delta_x_bar**2. +isv%d * delta_x_bar**3.
643     else if(parameters%INTERPOLATIONMETHOD == IDX_LINEAR) then
645         rho_bar = isv%a*(pressure_bar - eos_element%pressure_bar) + isv%b
647     end if
649
651     interpolation_rho_from_eos = rho_bar
653
655     !-----
656     ! DESCRIPTION:
657     !> Evaluates the pressure P at a given density
658     !> Compute \f$ P \f$
659     !-----
661     double precision function density_from_eos_table(parameters, dimless_pressure)
662     implicit none
663     type(ConfigParameters), intent(in) :: parameters
664     double precision, intent(in) :: dimless_pressure
665
666     double precision :: rho_bar
667
668     type(EquationOfStateValue), pointer :: eos_value
669
670     double precision currentPressure, nextPressure
671
672     !write (*,*) '(dimless_pressure) = (', dimless_pressure, ')'
673
674     if(dimless_pressure <= 0.) then
675         rho_bar = 0.
676     else
677         !Da pra otimizar isso aqui...
678         eos_value => parameters%first_element
679
680         currentPressure = parameters%first_element%pressure_bar
681         nextPressure = parameters%first_element%next_element%pressure_bar
682
683         do while (.not. (currentPressure >= dimless_pressure .and. &
684             nextPressure < dimless_pressure ))
685
686             !write (*,*) '(currentPressure, nextPressure) = (', currentPressure, ', ',
687             nextPressure, ')',
688
689             if(associated(eos_value%next_element)) then
690
691                 eos_value => eos_value%next_element
692
693                 currentPressure = eos_value%pressure_bar
694
695                 if(associated(eos_value%next_element)) then
696                     nextPressure = eos_value%next_element%pressure_bar
697                 else
698                     nextPressure = 0.
699                 end if
700             end if
701
702         end do
703
704         rho_bar = interpolation_rho_from_eos (parameters, eos_value, dimless_pressure)
705
706         !write (*,*) '(pressure_bar, rho_bar) = (', dimless_pressure, ', ', rho_bar,
707         '),',
708     end if
709     density_from_eos_table = rho_bar
711 end function density_from_eos_table
713
715 end module cubic_spline_module

```

./programs/tovsolver/src/tovsolver/cubic\_spline\_module.f90

```

1 |-----|
2 |!|
3 |! RAdS Jan12.
4 |! Copyright (C) 2011–2014 by Rodrigo Alvares de Souza.
5 |! Mail: <rsouza01@gmail.com>. Web: "http://www.astro.iag.usp.br/~rsouza/".
6 |! This program may be copied and/or distributed freely. See the
7 |! - terms and conditions in the files in the doc/ subdirectory.
8 |!|
9 |! MODULE: cgs_constants
10 |!|
11 |!> @author
12 |!> Rodrigo Souza
13 |!|
14 |! DESCRIPTION:
15 |!> Math and physical constants not defined in the language
16 |!|
17 |-----|
18 |
19 | module global_constants
20 |     implicit none
21 |
22 |
23 |     !NUMBER OF DIFFERENTIAL EQUATIONS
24 |     integer , parameter :: N_DIF_EQUATIONS = 2
25 |
26 |     integer , parameter :: IDX_EQN_DM_DN = 1
27 |     integer , parameter :: IDX_EQN_DP_DN = 2
28 |
29 |
30 |     !INDEXES
31 |     integer , parameter :: N_VARIABLES = 9
32 |
33 |     integer , parameter :: IDX_MASS_BAR = 1
34 |     integer , parameter :: IDX_PRESSURE_BAR = 2
35 |     integer , parameter :: IDX_ENERGY_DENSITY_BAR = 3
36 |     integer , parameter :: IDX_RADIUS_BAR = 4
37 |     integer , parameter :: IDX_RHO_BAR = 5
38 |     integer , parameter :: IDX_BARYON_NUMBER = 6
39 |     integer , parameter :: IDX_INFOR_ENTROPY = 7
40 |     integer , parameter :: IDX_DISEQUILIBRIUM = 8
41 |     integer , parameter :: IDX_SPEED_OF_SOUND = 9
42 |
43 |
44 |     double precision , public , parameter :: const_pi = 355./113.
45 |
46 |     !UNITS RELATIVE TO INTERPOLATION METHOD
47 |     integer , parameter :: IDX_TOTAL_INTERPOLATION_METHODS = 2
48 |
49 |     integer , parameter :: IDX_CUBIC_SPLINE = 1
50 |     integer , parameter :: IDX_LINEAR = 2
51 |
52 |     character , parameter , dimension (IDX_TOTAL_INTERPOLATION_METHODS) :: &
53 |         INTERPOLATION_METHODS_DESCR (IDX_TOTAL_INTERPOLATION_METHODS)*6 = &
54 |         (/ 'CUBIC' , 'LINEAR' /)
55 |
56 |
57 |     !UNITS RELATIVE TO THE SYSTEM USED
58 |     integer , parameter :: IDX_TOTAL_SYSTEMS = 4
59 |     integer , parameter :: IDX_CGS = 1
60 |     integer , parameter :: IDX_NUCLEAR = 2
61 |     integer , parameter :: IDX_SI = 3
62 |     integer , parameter :: IDX_OTHER = 4
63 |
64 |     character , parameter , dimension (IDX_TOTAL_SYSTEMS) :: UNIT_SYSTEM_DESCR (
65 |         IDX_TOTAL_SYSTEMS)*3 = &
66 |         (/ 'CGS' , 'NUC' , 'SI' , 'OTH' /)
67 |
68 |     double precision , parameter , dimension (IDX_TOTAL_SYSTEMS) :: LIGHT_SPEED = &
69 |         (/ 2.998D10, 1.0D0, 2.998D8, 0D0 /)
70 |
71 |     double precision , parameter , dimension (IDX_TOTAL_SYSTEMS) :: LIGHT_SPEED_SCALE = &
72 |         (/ 2.998D10, 2.998D23, 2.998D8, 0D0 /)
73 |
74 |     double precision , parameter , dimension (IDX_TOTAL_SYSTEMS) :: GRAVITATIONAL_CONSTANT = &
75 |         (/ 6.674D-8, 1.18994D+5, 6.674D-11, 0D0 /)
76 |
77 |     double precision , parameter , dimension (IDX_TOTAL_SYSTEMS) :: SOLAR_MASS = &
78 |         (/ 1.9891D+33, 1.116D+60, 1.9891D+30, 0D0 /)
79 |
80 |     double precision , parameter , dimension (IDX_TOTAL_SYSTEMS) :: SOLAR_RADIUS = &
81 |         (/ 6.955D+10, 6.955D+23, 6.955D+8, 0D0 /)
82 |
83 |     double precision , parameter , dimension (IDX_TOTAL_SYSTEMS) :: CONVERSION_LENGTH = &
84 |         (/ 1.0D-5, 1.0D-18, 1.0D-3, 0D0 /)

```

85

```
end module global_constants
```

```
./programs/tovsolver/src/tovsolver/global_constants.f90
```

```
2  !
3  ! RAdS Jan12.
4  ! Copyright (C) 2011–2014 by Rodrigo Alvares de Souza.
5  ! Mail: <rsouza01@gmail.com>. Web: "http://www.astro.iag.usp.br/~rsouza/".
6  ! This program may be copied and/or distributed freely. See the
7  ! - terms and conditions in the files in the doc/ subdirectory.
8  !
9  !
10 ! MODULE: linked_list_module
11 !
12 !> @author
13 !> Rodrigo Souza
14 !
15 ! DESCRIPTION:
16 !> Linked list related stuff
17 !
18 !-----
19 module linked_list_module
20 use types
21 use global_constants
22
23
24     implicit none
25
26     contains
27
28     subroutine ll_allocate(list)
29     implicit none
30         Type(EquationOfStateValue), pointer, intent(inout) :: list
31
32         allocate(list)
33
34     end subroutine ll_allocate
35
36
37     subroutine ll_insert_ordered(list, node)
38     implicit none
39         Type(EquationOfStateValue), pointer :: list
40         Type(EquationOfStateValue), pointer :: node
41
42         allocate(list)
43
44     end subroutine ll_insert_ordered
45
46 end module linked_list_module
```

./programs/tovsolver/src/tovsolver/linked\_list\_module.f90

```

1 |-----|
3 | RAdS Jan12.
4 | Copyright (C) 2011–2014 by Rodrigo Alvares de Souza.
5 | Mail: <rsouza01@gmail.com>. Web: "http://www.astro.iag.usp.br/~rsouza/".
6 | This program may be copied and/or distributed freely. See the
7 | - terms and conditions in the files in the doc/ subdirectory.
9 |
10 | MODULE: output_module
11 |
12 | > @author
13 | > Rodrigo Souza
14 |
15 | DESCRIPTION:
16 | > Output related routines
17 |-----|
19 | module output_module
20 |
21 | use types
22 | use global_constants
23 |
24 | implicit none
25 |
26 | contains
27 |
28 | > \brief Prints the formatted output (header).
29 | !!
30 | !! \param parameters
31 | !! \param t
32 | !! \param V
33 | !!
34 | subroutine print_header_output(parameters, t, V)
35 |   type(ConfigParameters), intent(in) :: parameters
36 |   double precision, intent(in) :: t
37 |   double precision, intent(in) :: V(N.VARIABLES)
38 |
39 |   write (*, '(A)') '
40 | #-----|
41 |   write (*, '(A)') '#                               PROFILES'
42 |   write (*, '(A)') '#
43 | #-----|
44 |   write (*, '(A)') '#           t           mass_bar           rho_bar
45 |   P_bar
46 |   write (*, '(A)') '#-----|-----|-----|
47 |
48 | end subroutine print_header_output
49 |
50 | > \brief Prints the formatted output (footer).
51 | !!
52 | !! \param parameters
53 | !! \param t
54 | !! \param V
55 | !!
56 | subroutine print_footer_output(parameters, t, V)
57 |   type(ConfigParameters) :: parameters
58 |   double precision :: t
59 |   double precision :: V(N.VARIABLES)
60 |
61 |   write (*, '(A)') '
62 | #-----|
63 |   write (*, '(A)') '#           t           mass_bar           rho_bar
64 |   P_bar
65 |   write (*, '(A)') '#-----|-----|-----|
66 |
67 | end subroutine print_footer_output
68 |
69 | > \brief Prints formatted output to the screen.
70 | !!
71 | !! \param parameters
72 | !! \param t
73 | !! \param V
74 | !!
75 | subroutine print_formatted_output(parameters, t, V)
76 |   type(ConfigParameters), intent(in) :: parameters
77 |   double precision, intent(in) :: t
78 |   double precision, intent(in) :: V(N.VARIABLES)

```

```

77     double precision :: radius
79     character(len=50) :: eosData_Line      = "(A, F15.5, E20.10, E20.10, E20.10, E20
.10)"
81     radius = t
83     write (*, eosData_Line) ' ', t, &
      V(IDX_MASS_BAR), &
85     V(IDX_RHO_BAR), &
87     V(IDX_PRESSURE_BAR), &
      V(IDX_SPEED_OF_SOUND)
89     !write (*,*) '(t, mass, density, pressure) = (', t, ', ', V(IDX_MASS_BAR), ', ', &
!     V(IDX_RHO_BAR), ', ', V(IDX_PRESSURE_BAR), ', )'
91
93 end subroutine print_formatted_output
95
97 !! \brief Prints the summary at the end of the execution.
99 !! \param parameters
!! \param t
!! \param V
101 subroutine print_summary(parameters, t, V)
102 type(ConfigParameters) :: parameters
103 double precision :: t
104 double precision :: V(N.VARIABLES)
105
106 double precision :: radiusUnitSystem
107 radiusUnitSystem = V(IDX_RADIUS_BAR) * parameters%scale_radius
108
109 write (*, '(A)') '
#
111 write (*, '(A)') '# SUMMARY'
112 write (*, '(A)') '
#
113 write (*, '(A, E20.10)') '# Pressure : ', V(IDX_PRESSURE_BAR)
114
115 !write (*,*) '# Pressure : ', V(IDX_PRESSURE_BAR)
116
117 write (*, '(A)') '#
118
119 write (*, '(A, E20.10)') '# Star Radius (dimensionless) : ', V(IDX_RADIUS_BAR)
120 write (*,*) '# Star Radius (', UNIT_SYSTEM_DESCR(parameters%UNIT_SYSTEM), ')
: ', &
121 radiusUnitSystem
122
123 write (*,*) '# Star Radius (Solar Units) : ', &
radiusUnitSystem/SOLAR_RADIUS(parameters%UNIT_SYSTEM)
124
125
126 write (*,*) '# Star Radius (km) : ', &
127 radiusUnitSystem * CONVERSION_LENGTH(parameters%UNIT_SYSTEM)
128
129 write (*,*) '#
130
131 write (*,*) '# Star Mass (dimensionless) : ', V(IDX_MASS_BAR)
132 write (*,*) '# Star Mass (', UNIT_SYSTEM_DESCR(parameters%UNIT_SYSTEM), ')
: ', &
133 V(IDX_MASS_BAR) * parameters%scale_mass
134 write (*,*) '# Star Mass (Solar Units) : ', &
135 (V(IDX_MASS_BAR) * parameters%scale_mass) / (SOLAR_MASS(parameters%UNIT_SYSTEM
))
136
137 if (parameters%eos_file_provides_baryonic_density) then
138 write (*,*) '#
139 write (*,*) '# Baryon Number : ', V(IDX_BARYON_NUMBER)
140 end if
141
142 write (*,*) '#
143
144 write (*,*) '# Information Entropy : ', V(IDX_INFOR_ENTROPY)
145 write (*,*) '# Disequilibrium : ', V(IDX_DISEQUILIBRIUM)
146 write (*,*) '# Complexity : ', exp(V(IDX_INFOR_ENTROPY)) * V(
147 IDX_DISEQUILIBRIUM)
148
149 write (*,*) '#
write (*, '(A)') '
#

```



```

151
153 end subroutine print_summary
155 !> \brief Print in the screen the parameters of the system.
156 !!!
157 !!! \param cl_parameters
158 !!! \param parameters
159
160 subroutine print_config(cl_parameters , parameters)
161   implicit none
162
163   type(CommandLineParameters) :: cl_parameters
164   type(ConfigParameters)     :: parameters
165
166   write (*, '(A)') '
#-----
167   write (*, '(A, A)') '# Config File: ', cl_parameters%parameter_file
168   write (*, '(A, A)') '# EoS File: ', parameters%eos_file_name
169
170   write (*, '(A, i13)') '# max_rk_steps : ', parameters%max_rk_steps
171   write (*, '(A, f8.5)') '# diff_eq_step : ', parameters%diff_eq_step
172   write (*, '(A, f8.5)') '# interpolation_tolerance : ', parameters%
interpolation_tolerance
173   write (*, '(A, f8.5)') '# max_diff_eq_step : ', parameters%max_diff_eq_step
174   write (*, '(A, f8.5)') '# min_diff_eq_step : ', parameters%min_diff_eq_step
175
176   write (*, '(A, l)') '# output_summary_only: ', parameters%output_summary_only
177   write (*, '(A, l)') '# verbose_eos: ', parameters%verbose_eos
178   write (*, '(A, l)') '# verbose_interpolation_coeficients: ', parameters%
verbose_interpolation_coeficients
179   write (*, '(A, l)') '# output_gnuplot_style: ', parameters%output_gnuplot_style
180   write (*, '(A, l)') '# eos_file_provides_baryonic_density: ', parameters%
eos_file_provides_baryonic_density
181
182   write (*, '(A, A)') '# INTERPOLATION METHOD : ', INTERPOLATION_METHODS_DESCR(
parameters%INTERPOLATION_METHOD);
183
184   write (*, '(A, A)') '# UNIT SYSTEM : ', UNIT_SYSTEM_DESCR(parameters%UNIT_SYSTEM);
185
186   write (*, '(A, e10.5)') '# RHO_0 : ', parameters%RHO_0
187   write (*, '(A, e10.5)') '# RHO_ADIM : ', parameters%RHO_ADIM
188   write (*, '(A, e10.5)') '# cutoff_RHO_0 : ', parameters%cutoff_RHO_0
189   write (*, '(A, e10.5)') '# cutoff_density : ', parameters%cutoff_density
190
191   write (*, '(A, e10.5)') '# P_0 : ', parameters%P_0;
192
193   if (parameters%eos_file_provides_baryonic_density) then
194     write (*, '(A, e10.5)') '# BARYONIC_DENSITY_0 : ', parameters%
BARYONIC_DENSITY_0
195   end if
196
197   write (*, '(A, e10.5)') '# SCALE_RADIUS : ', parameters%scale_radius
198   write (*, '(A, e10.5)') '# SCALE_MASS : ', parameters%scale_mass
199
200   write (*, '(A, e10.5)') '# log_base_calc_infor_entropy : ', parameters%
log_base_calc_infor_entropy
201   write (*, '(A, e10.5)') '# K_entropy : ', parameters%K_entropy
202
203   if(parameters%verbose_eos .eqv. .true.) then
204     call print_eos_table(cl_parameters, parameters)
205   end if
206
207
208   write (*, '(A)') '
#-----
209
210   if(parameters%verbose_interpolation_coeficients .eqv. .true.) then
211     call print_interpolation_table(cl_parameters, parameters)
212   end if
213   write (*, '(A)') ' '
214
215 end subroutine print_config
216
217 !> \brief Load in memory the values from the EoS Table.
218 !!!
219 !!! \param cl_parameters
220 !!! \param parameters
221 !!!
222 subroutine print_eos_table(cl_parameters, parameters)
223   implicit none
224
225   type(CommandLineParameters) :: cl_parameters

```

```

227     type(ConfigParameters) :: parameters
229     Type(EquationOfStateValue), pointer :: eos_element
231     character(len=50) :: eosData_Line      = "(A, i3, E15.5, E15.5, E15.5, E15.5, E15
233     eos_element => parameters%first_element
235     write (*, '(A)') '
#
237     write (*, '(A)') '# EoS Table'
239     write (*, '(A)') '# j      pressure      P_bar      rho      rho_bar
rho_baryon rho_baryon_bar'
write (*, '(A)') '# _____',
#
241
243     do while(associated(eos_element%next_element))
245         write (*, eosData_Line) '#', &
247             eos_element%idx_j, &
249             eos_element%pressure, &
251             eos_element%pressure_bar, &
253             eos_element%rho, &
255             eos_element%rho_bar, &
257             eos_element%baryonic_number_density, &
259             eos_element%baryonic_number_density_bar
261         eos_element => eos_element%next_element
263     end do
265 end subroutine print_eos_table
267
269 !> \brief Prints in the screen the coefficients calculated by the cubic spline
271 interpolation.
273 !!
275 !! \param cl_parameters
277 !! \param parameters
279 !!
281 subroutine print_interpolation_table(cl_parameters, parameters)
283 implicit none
285
287     type(CommandLineParameters) :: cl_parameters
289     type(ConfigParameters) :: parameters
291
293     Type(EquationOfStateValue), pointer :: eos_element
295
297     character(len=50) :: eosData_Line      = "(A, i3, E15.5, E15.5, E15.5, E15.5, E15
299     eos_element => parameters%first_element
301     write (*, '(A)') '
#
303     write (*, '(A)') '# Cubic Spline Coeficients - RHO.FROM.PRESSURE Table'
305     write (*, '(A)') '# j      rho_bar      P_bar      a      b
rho_bar      P_bar      a      b'
write (*, '(A)') '# _____',
#
307     eos_element => parameters%first_element
309     do while(associated(eos_element%next_element))
311         write (*, eosData_Line) '#', eos_element%idx_j, &
313             eos_element%rho_bar, eos_element%pressure_bar, &
315             eos_element%RHO.FROM.PRESSURE%a, & ! ', ', &
317             eos_element%RHO.FROM.PRESSURE%b, & ! ', ', &
319             eos_element%RHO.FROM.PRESSURE%c, & ! ', ', &
321             eos_element%RHO.FROM.PRESSURE%d
323         eos_element => eos_element%next_element
325     end do
327     write (*, '(A)') '# _____',
#
329     write (*, '(A)') '# j      rho_bar      P_bar      a      b
rho_bar      P_bar      a      b'
331     write (*, '(A)') '
#

```

```

293 write (*, '(A)') '
#
295 write (*, '(A)') '# Cubic Spline Coeficients - PRESSURE.FROMRHO Table'
write (*, '(A)') '
#
297 write (*, '(A)') '# j      rho_bar      P_bar      a      b
c      d'
write (*, '(A)') '# _____,
eos_element => parameters%first_element
do while(associated(eos_element%next_element))
301     write (*, eosData_Line) '#', eos_element%idx_j, &
303     eos_element%rho_bar, eos_element%pressure_bar, &
305     eos_element%PRESSURE.FROMRHO%a, & ! ', ', &
eos_element%PRESSURE.FROMRHO%b, & ! ', ', &
307     eos_element%PRESSURE.FROMRHO%c, & ! ', ', &
eos_element%PRESSURE.FROMRHO%d
309     eos_element => eos_element%next_element
end do
311 write (*, '(A)') '# _____,
write (*, '(A)') '# j      rho_bar      P_bar      a      b
c      d'
313 write (*, '(A)') '
#
315
end subroutine print_interpolation_table
317 end module output_module

```

./programs/tovsolver/src/tovsolver/output\_module.f90

```

2  !
3  ! RAdS Jan12.
4  ! Copyright (C) 2011–2014 by Rodrigo Alvares de Souza.
5  ! Mail: <rsouza01@gmail.com>. Web: "http://www.astro.iag.usp.br/~rsouza/".
6  ! This program may be copied and/or distributed freely. See the
7  ! - terms and conditions in the files in the doc/ subdirectory.
8  !
9  !
10 ! MODULE: prototypes
11 !
12 !> @author
13 !> Rodrigo Souza
14 !
15 ! DESCRIPTION:
16 !> Function prototypes
17 !
18 !-----
19 module prototypes
20
21     implicit none
22
23     interface
24
25         subroutine set_initial_conditions(parameters, Y, V)
26             use types
27             use global_constants
28             implicit none
29
30             type(ConfigParameters) :: parameters
31             double precision :: Y(N_DIFF_EQUATIONS)
32             double precision :: V(N_VARIABLES)
33
34         end subroutine set_initial_conditions
35
36         subroutine process_specific_calculations(parameters, t, Y, V)
37             use types
38             use global_constants
39             implicit none
40
41             type(ConfigParameters) :: parameters
42             double precision :: t
43             double precision :: Y(N_DIFF_EQUATIONS)
44             double precision :: V(N_VARIABLES)
45
46         end subroutine process_specific_calculations
47
48         double precision function derivative(parameters, t, Y, V, equationNumber)
49             use types
50             use global_constants
51             implicit none
52
53             type(ConfigParameters) :: parameters
54             double precision :: t
55             double precision :: Y(N_DIFF_EQUATIONS)
56             double precision :: V(N_VARIABLES)
57             integer :: equationNumber
58
59         end function derivative
60
61
62         logical function can_stop(parameters, t, Y, V)
63             use types
64             use global_constants
65             implicit none
66
67             type(ConfigParameters) :: parameters
68             double precision :: t
69             double precision :: Y(N_DIFF_EQUATIONS)
70             double precision :: V(N_VARIABLES)
71
72         end function can_stop
73
74     end interface
75 end module prototypes

```

./programs/tovsolver/src/tovsolver/prototypes.f90

```

2  !
3  ! RAdS Jan12.
4  ! Copyright (C) 2011–2014 by Rodrigo Alvares de Souza.
5  ! Mail: <rsouza01@gmail.com>. Web: "http://www.astro.iag.usp.br/~rsouza/".
6  ! This program may be copied and/or distributed freely. See the
7  ! - terms and conditions in the files in the doc/ subdirectory.
8  !
9  !
10 ! MODULE: solver_module
11 !
12 !> @author
13 !> Rodrigo Souza
14 !
15 ! DESCRIPTION:
16 !> Runge–kutta related routines
17 !
18 !
19 module solver_module
20 use global_constants
21 use config_module
22 use tov_module
23
24 implicit none
25
26 contains
27
28 !-----
29 ! DESCRIPTION:
30 !> The hard work
31 !-----
32
33 subroutine process_calculations(parameters, error)
34 implicit none
35 !Parameters
36 type(ConfigParameters) :: parameters
37 integer :: error
38
39 integer :: j = 0
40 double precision :: t = 0
41
42 !Variables that hold the integrations values for a single call to Runge–Kutta
43 double precision :: Y(N_DIFF_EQUATIONS)
44
45 !Variables that hold the physical relevant values
46 double precision :: V(N_VARIABLES)
47
48 t = j * parameters%diff_eq_step
49
50 call set_initial_conditions(parameters, Y, V)
51
52 if(.not. parameters%output_summary_only) then
53   call print_header_output(parameters, t, V)
54 end if
55
56 do while ( j < parameters%max_rk_steps .and. (.not. can_stop(parameters, t, Y, V))
57 )
58
59   !In the first iteration, it must show the initial conditions.
60   if(.not. parameters%output_summary_only) then
61     call print_formatted_output(parameters, t, V)
62   end if
63
64   call runge_kutta_4(parameters, t, Y, V)
65
66   call process_specific_calculations(parameters, t, Y, V)
67
68   j = j + 1
69
70   t = j * parameters%diff_eq_step
71
72 end do
73
74 if(.not. parameters%output_summary_only) then
75   call print_footer_output(parameters, t, V)
76 end if
77
78 call print_summary(parameters, t, V)
79
80 end subroutine process_calculations
81
82 !-----
83 ! DESCRIPTION:
84 !> The hard work
85 !-----

```

```

86  subroutine process_calculations_variable_step_size(parameters, error)
87  implicit none
88  !Parameters
89  type(ConfigParameters) :: parameters
90  integer :: error
91
92  integer :: j = 0
93  double precision :: t = 0
94
95  !Variables that hold the integrations values for a single call to Runge Kutta
96  double precision :: Y(N_DIFF_EQUATIONS)
97
98  !Variables that hold the physical relevant values
99  double precision :: V(N_VARIABLES)
100
101  logical :: flag = .true.
102
103  double precision :: calculated_h = 0.
104
105  calculated_h = parameters%max_diff_eq_step
106
107  t = j * calculated_h
108
109  call set_initial_conditions(parameters, Y, V)
110
111  if(.not. parameters%output_summary_only) then
112    call print_header_output(parameters, t, V)
113  end if
114
115  do while ( flag .eqv. .true. .and. j < parameters%max_rk_steps .and. (.not.
116    can_stop(parameters, t, Y, V)))
117
118    !In the first iteration, it must show the initial conditions.
119    if(.not. parameters%output_summary_only) then
120      call print_formatted_output(parameters, t, V)
121    end if
122
123    call runge_kutta_fehlberg(parameters, t, Y, V, calculated_h, flag)
124
125    call process_specific_calculations(parameters, t, Y, V)
126
127    j = j + 1
128    t = j * calculated_h
129
130  end do
131
132  if(.not. parameters%output_summary_only) then
133    call print_footer_output(parameters, t, V)
134  end if
135
136  call print_summary(parameters, t, V)
137
138  end subroutine process_calculations_variable_step_size
139
140
141  !-----
142  ! DESCRIPTION:
143  !> runge_kutta_fehlberg
144  !-----
145  subroutine runge_kutta_fehlberg(parameters, t, Y, V, calculated_h, flag)
146  implicit none
147
148  type(ConfigParameters) :: parameters
149  double precision :: t, Y(N_DIFF_EQUATIONS), V(N_VARIABLES)
150  logical :: flag
151
152  double precision :: k1(N_DIFF_EQUATIONS), k2(N_DIFF_EQUATIONS), &
153    k3(N_DIFF_EQUATIONS), k4(N_DIFF_EQUATIONS), &
154    k5(N_DIFF_EQUATIONS), k6(N_DIFF_EQUATIONS)
155
156  integer :: equationNumber
157  double precision :: t_linha, calculated_h
158  logical :: Rs_leq_TOL = .true. !R's < TOL
159  double precision :: R(N_DIFF_EQUATIONS), delta, average_R
160
161  t_linha = t
162
163  !Small adjustment for t=0 in order to avoid the singularity
164  if (t == 0.) then
165    t_linha = t + calculated_h * 0.001
166  end if
167
168  !write (*,'(A)') '-----',
169  !1st step
170  !write (*,'(A)'),'Eq.          K1'
```

```

172     !write (*,'(A)') '---- _____'
173     do equationNumber = 1, N_DIFF.EQUATIONS, 1
174         k1(equationNumber) = calculated_h * derivative(parameters, t_linha, Y, V,
equationNumber)
175         ! write (*,'(i3, f15.7)') , equationNumber, k1(equationNumber)
176     end do
177
178     !2nd step
179     !write (*,'(A)'),'Eq. _____ K2'
180     !write (*,'(A)'),'---- _____'
181     do equationNumber = 1, N_DIFF.EQUATIONS, 1
182         k2(equationNumber) = calculated_h * derivative(parameters, t_linha +
calculated_h/4., Y + k1/4., V, equationNumber)
183         ! write (*,'(i3, f15.7)') , equationNumber, k2(equationNumber)
184     end do
185
186     !3rd step
187     !write (*,'(A)'),'Eq. _____ K3'
188     !write (*,'(A)'),'---- _____'
189     do equationNumber = 1, N_DIFF.EQUATIONS, 1
190         k3(equationNumber) = calculated_h * derivative(parameters, &
t_linha + 3.*calculated_h/8., &
191         Y + 3.*k1/32. + 9.*k2/32., &
192         V, equationNumber)
193         ! write (*,'(i3, f15.7)') , equationNumber, k3(equationNumber)
194     end do
195
196     !4th step
197     !write (*,'(A)'),'Eq. _____ K4'
198     !write (*,'(A)'),'---- _____'
199     do equationNumber = 1, N_DIFF.EQUATIONS, 1
200         k4(equationNumber) = calculated_h * derivative(parameters, &
t_linha + (12./13.)*calculated_h, &
201         Y + (1932./2197)*k1 - (7200./2197)*k2 + (7296./2197.)*k3, &
202         V, equationNumber)
203         ! write (*,'(i3, f15.7)') , equationNumber, k4(equationNumber)
204     end do
205
206     !5th step
207     !write (*,'(A)'),'Eq. _____ K4'
208     !write (*,'(A)'),'---- _____'
209     do equationNumber = 1, N_DIFF.EQUATIONS, 1
210         k5(equationNumber) = calculated_h * derivative(parameters, &
t_linha + calculated_h, &
211         Y + (439./216.)*k1 - 8.*k2 + (3680./513)*k3 - (845./4104.)*k4, &
212         V, equationNumber)
213         ! write (*,'(i3, f15.7)') , equationNumber, k5(equationNumber)
214     end do
215
216     !6th step
217     !write (*,'(A)'),'Eq. _____ K4'
218     !write (*,'(A)'),'---- _____'
219     do equationNumber = 1, N_DIFF.EQUATIONS, 1
220         k6(equationNumber) = calculated_h * derivative(parameters, &
t_linha + 0.5*calculated_h, &
221         Y - (8./27.)*k1 - 2.*k2 - (3544./2565.)*k3 - (1859./4104.)*k4 - (11./40.)*
k5, &
222         V, equationNumber)
223         ! write (*,'(i3, f15.7)') , equationNumber, k6(equationNumber)
224     end do
225
226     !Calculations
227     do equationNumber = 1, N_DIFF.EQUATIONS, 1
228         R(equationNumber) = (1./calculated_h) * abs( &
229         (1./360.)*k1(equationNumber) - &
230         (128./4275.)*k2(equationNumber) - &
231         (2197./75240.)*k4(equationNumber) + &
232         (1./50.)*k5(equationNumber) + &
233         (2./55.)*k6(equationNumber));
234
235         !write (*,*) 'R(', equationNumber, ') = ', R(equationNumber)
236         if(R(equationNumber) > parameters%interpolation_tolerance) then
237             Rs_leq_TOL = .false.
238         end if
239
240         average_R = R(equationNumber) / N_DIFF.EQUATIONS
241
242     end do
243
244     if(Rs_leq_TOL .eqv. .true.) then
245         do equationNumber = 1, N_DIFF.EQUATIONS, 1
246             Y(equationNumber) = Y(equationNumber) + &
247             (25./216.)*k1(equationNumber) + &
248             (1408./2565.)*k3(equationNumber) + &
249             (2197./4104.)*k4(equationNumber) + &

```

```

254         (1./5.)*k5(equationNumber)
255     end do
256         calculated_h = parameters%diff_eq_step
257     end if
258
259     delta = 0.84 * (parameters%interpolation_tolerance / average_R)** (1./4.)
260
261     if(delta < 0.1) then
262         calculated_h = 0.1 * calculated_h
263     elseif(delta >= 4.) then
264         calculated_h = 4. * calculated_h
265     else
266         calculated_h = delta * calculated_h
267     end if
268
269     if(calculated_h > parameters%max_diff_eq_step) then
270         calculated_h = parameters%max_diff_eq_step
271     end if
272
273     if (calculated_h < parameters%min_diff_eq_step) then
274         flag = .false.
275     end if
276
277 end subroutine runge_kutta_fehlberg
278
279
280
281 !-----
282 ! DESCRIPTION:
283 !> runge_kutta_4
284 !-----
285 subroutine runge_kutta_4(parameters, t, Y, V)
286 implicit none
287
288 type(ConfigParameters) :: parameters
289 double precision :: t, Y(N_DIFF_EQUATIONS), V(N_VARIABLES)
290
291 double precision :: k1(N_DIFF_EQUATIONS), k2(N_DIFF_EQUATIONS), &
292                 k3(N_DIFF_EQUATIONS), k4(N_DIFF_EQUATIONS)
293
294 integer :: equationNumber
295 double precision :: t_linha, h
296
297 h = parameters%diff_eq_step
298 t_linha = t
299
300 !Small adjustment for t=0 in order to avoid the singularity
301 if (t == 0.) then
302     t_linha = t + parameters%diff_eq_step * 0.001
303 end if
304
305 !write (*,'(A)') '-----',
306 !1st step
307 !write (*,'(A)'),'Eq.          K1',
308 !write (*,'(A)'),'-----',
309 do equationNumber = 1, N_DIFF_EQUATIONS, 1
310     k1(equationNumber) = h * derivative(parameters, t_linha, Y, V, equationNumber)
311     ! write (*,'(i3, f15.7)') , equationNumber, k1(equationNumber)
312 end do
313
314 !2nd step
315 !write (*,'(A)'),'Eq.          K2',
316 !write (*,'(A)'),'-----',
317 do equationNumber = 1, N_DIFF_EQUATIONS, 1
318     k2(equationNumber) = h * derivative(parameters, t_linha + h/2., Y + k1/2., V,
equationNumber)
319     ! write (*,'(i3, f15.7)') , equationNumber, k2(equationNumber)
320 end do
321
322 !3rd step
323 !write (*,'(A)'),'Eq.          K3',
324 !write (*,'(A)'),'-----',
325 do equationNumber = 1, N_DIFF_EQUATIONS, 1
326     k3(equationNumber) = h * derivative(parameters, t_linha + h/2., Y + k2/2., V,
equationNumber)
327     ! write (*,'(i3, f15.7)') , equationNumber, k3(equationNumber)
328 end do
329
330 !4th step
331 !write (*,'(A)'),'Eq.          K4',
332 !write (*,'(A)'),'-----',
333 do equationNumber = 1, N_DIFF_EQUATIONS, 1
334     k4(equationNumber) = h * derivative(parameters, t_linha + h, Y + k3, V,
equationNumber)
335     ! write (*,'(i3, f15.7)') , equationNumber, k4(equationNumber)
336 end do

```



```
338     !Calculations
339     do equationNumber = 1, N_DIFF.EQUATIONS, 1
340         Y(equationNumber) = Y(equationNumber) + ( k1(equationNumber) + 2. * k2(
equationNumber) + &
341             2. * k3(equationNumber) + k4(equationNumber)) / 6.;
342     end do
343
344     !write (*,'(A)') '-----'
345     !write (*,'(A)') ', t           Massa           Pressao '
346     !write (*,'(A)') '-----'
347
348     !write (*,'(f10.5, f15.7 f15.7)') , t, Y(1), Y(2)
349     !write (*,'(A)') '-----'
350
351 end subroutine runge_kutta_4
352 end module solver_module
```

./programs/tovsolver/src/tovsolver/solver\_module.f90

```

1 |-----|
2 |!|
3 |! RAdS Jan12.
4 |! Copyright (C) 2011–2014 by Rodrigo Alvares de Souza.
5 |! Mail: <rsouza01@gmail.com>. Web: "http://www.astro.iag.usp.br/~rsouza/".
6 |! This program may be copied and/or distributed freely. See the
7 |! - terms and conditions in the files in the doc/ subdirectory.
8 |!|
9 |! MODULE: stat_module
10 |!|
11 |!> @author
12 |!> Rodrigo Souza
13 |!|
14 |! DESCRIPTION:
15 |!> Information theory related stuff
16 |!|
17 |-----|
18 |
19 module stat_module
20 use types
21 use global_constants
22 use config_module
23 use util
24
25 implicit none
26
27 contains
28
29 double precision function calc_infor_entropy(parameters, t, Y, V)
30 implicit none
31 type(ConfigParameters) :: parameters
32 double precision :: t
33 double precision :: Y(N_DIFF_EQUATIONS)
34 double precision :: V(N_VARIABLES)
35
36 double precision :: delta_radius
37 double precision :: rho
38 double precision :: radius
39
40 calc_infor_entropy = 0.
41
42 if (V(IDX_ENERGY_DENSITY_BAR) > 0.) then
43
44     radius = (parameters%scale_radius * t) * &
45             CONVERSIONLENGTH(parameters%UNIT_SYSTEM)
46
47     delta_radius = (parameters%scale_radius * parameters%diff_eq_step) * &
48                  CONVERSIONLENGTH(parameters%UNIT_SYSTEM)
49     !write(*,*) "(radius, delta_radius) = (", radius, ", ", delta_radius, ")"
50
51     rho = V(IDX_ENERGY_DENSITY_BAR) * parameters%RHO_0
52     !write(*,*) "(rho) = (", rho, ")"
53
54     !write(*,*) radius, ", ", rho
55
56     calc_infor_entropy = - parameters%K_entropy * &
57                        rho * log_n(rho, parameters%log_base_calc_infor_entropy) * &
58                        4 * const_pi * radius**2. * delta_radius
59
60     !write(*,*) "(coord_radial, densidade, delta_raio, I-parcial) = (", &
61                ! radius, ", ", rho, ", ", delta_radius, ", ", calc_infor_entropy, ")"
62
63     end if
64
65     !write(*,*) "(infor_entropy, radius, delta_eta, rho) = (", calc_infor_entropy, ",
66                ", radius, ", ", delta_eta, ", ", rho, ")"
67
68 end function calc_infor_entropy
69
70
71 double precision function calc_infor_disequilibrium(parameters, t, Y, V)
72 implicit none
73 type(ConfigParameters) :: parameters
74 double precision :: t
75 double precision :: Y(N_DIFF_EQUATIONS)
76 double precision :: V(N_VARIABLES)
77
78 double precision :: radius
79 double precision :: delta_radius
80 double precision :: rho
81
82 delta_radius = (parameters%scale_radius * parameters%diff_eq_step) * &
83              CONVERSIONLENGTH(parameters%UNIT_SYSTEM)
84
85 radius = (parameters%scale_radius * t) * &
86         CONVERSIONLENGTH(parameters%UNIT_SYSTEM)

```

```

87     rho = V(IDX_ENERGY_DENSITY_BAR) * parameters%RHO_0
89     calc_infor_disequilibrium = parameters%K_entropy * rho**2 * 4. * const_pi * radius
90     **2. * delta_radius
91 end function calc_infor_disequilibrium
92
93 double precision function calc_baryon_number(parameters, t, Y, V)
94 implicit none
95     type(ConfigParameters) :: parameters
96     double precision :: t
97     double precision :: Y(N_DIFF_EQUATIONS)
98     double precision :: V(N_VARIABLES)
99
100     double precision :: delta_eta
101     double precision :: metric_term
102     double precision :: barionic_density
103     double precision :: radius
104     double precision :: mass
105     double precision :: scale_radius
106     double precision :: scale_mass
107
108     scale_radius = parameters%scale_radius
109
110     scale_mass = parameters%scale_mass
111
112     delta_eta = scale_radius * parameters%diff_eq_step
113
114     radius = scale_radius * t
115
116     mass = scale_mass * V(IDX_MASS_BAR)
117
118     barionic_density = parameters%BARYONIC_DENSITY_0 * &
119         barionic_density_from_eos_table(parameters, V(IDX_ENERGY_DENSITY_BAR))
120
121     metric_term = 1. - 2. * GRAVITATIONAL_CONSTANT(parameters%UNIT_SYSTEM) * mass / &
122         (LIGHT_SPEED_SCALE(parameters%UNIT_SYSTEM)**2. * radius)
123
124     calc_baryon_number = 4. * const_pi * (metric_term)**(-0.5) * &
125         radius** 2. * barionic_density * delta_eta
126
127     !write(*,*) "(radius, barionic_density, calc_baryon_number) = (", radius, &
128     ! " ", " ", barionic_density, " ", " ", calc_baryon_number, ")"
129
130     !write(*,*) "(metric_term, calc_baryon_number) = ", metric_term,
131     calc_baryon_number
132 end function calc_baryon_number
133
134
135
136
137 end module stat_module

```

./programs/tovsolver/src/tovsolver/stat\_module.f90

```

1  !-----
2  !
3  ! RAdS Jan12.
4  ! Copyright (C) 2011–2014 by Rodrigo Alvares de Souza.
5  ! Mail: <rsouza01@gmail.com>. Web: "http://www.astro.iag.usp.br/~rsouza/".
6  ! This program may be copied and/or distributed freely. See the
7  ! - terms and conditions in the files in the doc/ subdirectory.
8  !-----
9  !
10 ! MODULE: tov_module
11 !
12 !> @author
13 !> Rodrigo Souza
14 !
15 ! DESCRIPTION:
16 !> TOV related types and functions (EDO's and stuff)
17 !-----
18 !
19 module tov_module
20 !
21 use types
22 use global_constants
23 use config_module
24 use output_module
25 use cubic_spline_module
26 use stat_module
27 !
28 implicit none
29 !
30 contains
31 !
32 !> \brief Set initial conditions
33 !!
34 !! \param parameters
35 !! \param Y
36 !! \param V
37 !!
38 !
39 subroutine set_initial_conditions(parameters, Y, V)
40 implicit none
41 !
42 type(ConfigParameters) :: parameters
43 double precision :: Y(N_DIFF_EQUATIONS)
44 double precision :: V(N_VARIABLES)
45 !
46 ! Initial conditions
47 !
48 !n = R_bar = 0
49 V(IDX_RADIUS_BAR) = 0.
50 !
51 !M_bar(0) = 0
52 V(IDX_MASS_BAR) = 0.
53 !
54 !Rho_bar(0) = RHO_0 / RHO_ADIM
55 V(IDX_RHO_BAR) = parameters%RHO_0 / parameters%RHO_ADIM
56 !
57 !P_bar(0) = P_0 / (Rho_0 * c^2)
58 V(IDX_PRESSURE_BAR) = parameters%P_0_bar
59 !
60 V(IDX_ENERGY_DENSITY_BAR) = V(IDX_RHO_BAR)
61 !
62 V(IDX_BARYON_NUMBER) = 0.
63 !
64 V(IDX_INFOR_ENTROPY) = 0.
65 V(IDX_DISEQUILIBRIUM) = 0.
66 !
67 Y(IDX_EQN_DM_DN) = 0.
68 Y(IDX_EQN_DP_DN) = V(IDX_PRESSURE_BAR)
69 !
70 !write (*,*) &
71 !      '(IDX_MASS_BAR, IDX_PRESSURE_BAR, IDX_ENERGY_DENSITY_BAR, IDX_RADIUS_BAR,
72 !      IDX_RHO_BAR) = (', &
73 !      ' ', V(IDX_MASS_BAR), ' ', V(IDX_PRESSURE_BAR), ' ', V(IDX_ENERGY_DENSITY_BAR),
74 !      ' ', &
75 !      ' ', V(IDX_RADIUS_BAR), ' ', V(IDX_RHO_BAR), ' )'
76 !
77 end subroutine set_initial_conditions
78 !
79 !> \brief The calculations that should be performed after the runge-kutta.
80 !! Conversions and other values that should be calculated go here
81 !!
82 !! \param parameters
83 !! \param t

```

```

85  !! \param Y
85  !! \param V
85  !!
87  subroutine process_specific_calculations(parameters, t, Y, V)
87      type(ConfigParameters) :: parameters
89      double precision :: t
89      double precision :: Y(N_DIFF_EQUATIONS)
91      double precision :: V(N_VARIABLES)
93
93      !OK
93      !write (*,*) &
95      !      '(IDX_MASS_BAR, IDX_PRESSURE_BAR, IDX_ENERGY_DENSITY_BAR, IDX_RADIUS_BAR,
95      !      IDX_RHO_BAR) = (', &
95      !      V(IDX_MASS_BAR), ', ', V(IDX_PRESSURE_BAR), ', ', V(IDX_ENERGY_DENSITY_BAR),
97      !      ', ', &
97      !      V(IDX_RADIUS_BAR), ', ', V(IDX_RHO_BAR), ', )'
99
99      V(IDX_RADIUS_BAR) = t;
101
101      V(IDX_PRESSURE_BAR) = Y(IDX_EQN_DP_DN);
103
103      V(IDX_ENERGY_DENSITY_BAR) = energy_density_from_eos(parameters, t, Y, V);
105
105      V(IDX_RHO_BAR) = V(IDX_ENERGY_DENSITY_BAR);
107
107      V(IDX_MASS_BAR) = Y(IDX_EQN_DM_DN);
109
109      V(IDX_INFOR_ENTROPY) = V(IDX_INFOR_ENTROPY) + calc_infor_entropy(parameters, t, Y,
109      V);
109      V(IDX_DISEQUILIBRIUM) = V(IDX_DISEQUILIBRIUM) + calc_infor_disequilibrium(
109      parameters, t, Y, V);
111
111      V(IDX_SPEED_OF_SOUND) = SQRT((parameters%P_0 * V(IDX_PRESSURE_BAR))/ &
113      (parameters%ENERGY_DENSITY_0 * V(IDX_RHO_BAR))) * &
113      LIGHT_SPEED_SCALE(parameters%UNIT_SYSTEM)
115
115      if (parameters%eos_file_provides_baryonic_density) then
117      V(IDX_BARYON_NUMBER) = V(IDX_BARYON_NUMBER) + calc_baryon_number(parameters, t
117      , Y, V);
117      end if
119
121
121      !write (*,*) V(IDX_ENERGY_DENSITY_BAR) * (parameters%RHO_ADIM * LIGHT_SPEED(
121      parameters%UNIT_SYSTEM)**2.), &
121      !', ', V(IDX_PRESSURE_BAR) * (parameters%RHO_ADIM * LIGHT_SPEED(parameters%
121      UNIT_SYSTEM)**2.)
123
125  end subroutine process_specific_calculations
127
127  !-----
127  ! DESCRIPTION:
129  !> Evaluates derivatives at a point
129  !-----
131  double precision function derivative(parameters, t, Y, V, equationNumber)
131  implicit none
133  type(ConfigParameters) :: parameters
133  double precision :: t, Y(N_DIFF_EQUATIONS), V(N_VARIABLES)
135  integer :: equationNumber
137
137  double precision :: returnValue
139
139  !write (*,*) &
139  !      '(IDX_MASS_BAR, IDX_PRESSURE_BAR, IDX_ENERGY_DENSITY_BAR, IDX_RADIUS_BAR,
141  !      IDX_RHO_BAR) = (', &
141  !      V(IDX_MASS_BAR), ', ', V(IDX_PRESSURE_BAR), ', ', V(IDX_ENERGY_DENSITY_BAR),
143  !      ', ', &
143  !      V(IDX_RADIUS_BAR), ', ', V(IDX_RHO_BAR), ', )'
145
145  select case (equationNumber)
145  case (IDX_EQN_DM_DN)
147      returnValue = dM_dn(parameters, t, Y, V);
149
149  case (IDX_EQN_DP_DN)
151
151      if (parameters%RHO_0 <= parameters%cutoff_RHO_0) then
151      returnValue = dP_dn_Newtonian(parameters, t, Y, V);
153      else
153      returnValue = dP_dn_Relativistic(parameters, t, Y, V);
155      end if
157
157  case default
157      returnValue = 0.;
159
159  end select

```

```

161     derivative = returnValue
162
163 end function derivative
164
165 !-----
166 ! DESCRIPTION:
167 !> Evaluates the pressure P at a point
168 !
169 !> Compute \f$ P \f$
170 !-----
171 double precision function dM_dn(parameters, t, Y, V)
172 implicit none
173 type(ConfigParameters) :: parameters
174 double precision :: t
175 double precision :: Y(N_DIFF_EQUATIONS)
176 double precision :: V(N_VARIABLES)
177
178 double precision :: energy_density_bar
179
180 !write (*,*) '(t, energy density) = (', t, ', ', V(IDX_ENERGY_DENSITY_BAR), ', )'
181
182 !V(IDX_ENERGY_DENSITY_BAR) = energy_density_from_eos(parameters, t, Y, V)
183 energy_density_bar = energy_density_from_eos(parameters, t, Y, V);
184
185 dM_dn = energy_density_bar * t**2.
186
187 end function dM_dn
188
189 !-----
190 ! DESCRIPTION:
191 !> Evaluates the pressure P at a point (TOV)
192 !
193 !> Compute \f$ P \f$
194 !-----
195 double precision function dP_dn_Relativistic(parameters, t, Y, V)
196 implicit none
197 type(ConfigParameters) :: parameters
198 double precision :: t
199 double precision :: Y(N_DIFF_EQUATIONS)
200 double precision :: V(N_VARIABLES)
201
202 double precision :: numerator, denominator
203
204 double precision :: energy_density_bar
205 double precision :: pressure_bar
206
207 energy_density_bar = energy_density_from_eos(parameters, t, Y, V);
208 pressure_bar = Y(IDX_PRESSURE_BAR);
209
210 !write (*,*) &
211 !   '(t, MASS, PRESSURE, ENERGY, RADIUS, RHO) = (', t, ', ', &
212 !   V(IDX_MASS_BAR), ', ', V(IDX_PRESSURE_BAR), ', ', V(IDX_ENERGY_DENSITY_BAR),
213 !   ', ', &
214 !   V(IDX_RADIUS_BAR), ', ', V(IDX_RHO_BAR), ', )'
215
216 numerator = - (energy_density_bar + pressure_bar)*(pressure_bar*(t**3.) + V(
217 IDX_MASS_BAR));
218
219 denominator = (t**2.) * (1. - 2. * V(IDX_MASS_BAR) / t);
220
221 !write (*,*) '(t, numerator, denominator)', t, ', ', numerator, ', ', denominator,
222 ', )'
223
224 dP_dn_Relativistic = numerator / denominator;
225 end function dP_dn_Relativistic
226
227 !-----
228 ! DESCRIPTION:
229 !> Evaluates the pressure P at a point (Newtonian)
230 !
231 !> Compute \f$ P \f$
232 !-----
233 double precision function dP_dn_Newtonian(parameters, t, Y, V)
234 implicit none
235 type(ConfigParameters) :: parameters
236 double precision :: t, Y(N_DIFF_EQUATIONS), V(N_VARIABLES)
237
238 dP_dn_Newtonian = - (V(IDX_MASS_BAR) * V(IDX_ENERGY_DENSITY_BAR) / (t **2.))
239 end function dP_dn_Newtonian
240
241 !> \brief Function that decides whether the program must stop.
242 !!!
243 !!! \param parameters
244 !!! \param t

```

```
245  !! \param Y
246  !! \param V
247  !! \return
248  !!
249  logical function can_stop(parameters, t, Y, V)
250  implicit none
251  type(ConfigParameters) :: parameters
252  double precision :: t
253  double precision :: Y(N_DIFF_EQUATIONS)
254  double precision :: V(N_VARIABLES)
255
256  !can_stop = (V(IDX_PRESSURE_BAR) <= 0.0 .OR. V(IDX_ENERGY_DENSITY_BAR) <= 0.0);
257  can_stop = (V(IDX_RHO_BAR) <= parameters%cutoff_density_bar .OR. &
258             V(IDX_PRESSURE_BAR) <= 0.0);
259
260  !DEBUG
261  !write (*,*) 'cutoff_density_bar, V(IDX_RHO_BAR) => ', parameters%
262  cutoff_density_bar, &
263  !      ', ', V(IDX_RHO_BAR)
264
265  end function can_stop
end module tov_module
```

./programs/tovsolver/src/tovsolver/tov\_module.f90

```

2  !
3  ! RAdS Jan12.
4  ! Copyright (C) 2011–2014 by Rodrigo Alvares de Souza.
5  ! Mail: <rsouza01@gmail.com>. Web: "http://www.astro.iag.usp.br/~rsouza/".
6  ! This program may be copied and/or distributed freely. See the
7  ! - terms and conditions in the files in the doc/ subdirectory.
8  !
9  !
10 ! MODULE: types
11 !
12 !> @author
13 !> Rodrigo Souza
14 !
15 ! DESCRIPTION:
16 !> Types used all over the source code.
17 !
18 !-----
19 module types
20 use global_constants
21
22 implicit none
23
24 !-----
25 ! DESCRIPTION:
26 !> Derived type, initialization parameters
27 !-----
28 type :: InterpolationStepValue
29
30 !-----
31 !Interpolation related stuff
32 !The values related to interpolation will be calculated
33 ! during the EoS table loading.
34
35 double precision :: a = 0., b = 0.
36
37 double precision :: x = 0., h = 0.
38 double precision :: c = 0., d = 0., alpha = 0.
39 double precision :: l = 0., mu = 0., z = 0.
40
41 end type InterpolationStepValue
42
43 !> \brief
44 !!
45 type :: EquationOfStateValue
46 integer :: idx_j
47 double precision :: rho = 0.
48 double precision :: pressure = 0.
49
50 double precision :: rho_bar = 0.
51 double precision :: pressure_bar = 0.
52
53 double precision :: baryonic_number_density = 0.
54 double precision :: baryonic_number_density_bar = 0.
55
56 type(InterpolationStepValue) :: RHO_FROM_PRESSURE, PRESSURE_FROM_RHO
57 type(InterpolationStepValue) :: BARYON_DENSITY_FROM_RHO, RHO_FROM_BARYON_DENSITY
58
59 !Linked list related stuff
60 type(EquationOfStateValue), pointer :: previous_element => null(), next_element =>
61 null()
62
63 end type EquationOfStateValue
64
65 type :: ConfigParameters
66
67 double precision :: diff_eq_step = 1.
68 integer :: max_rk_steps = 1000
69 double precision :: interpolation_tolerance
70 double precision :: max_diff_eq_step
71 double precision :: min_diff_eq_step
72
73 character(len=50) :: eos_file_name
74
75 double precision :: cutoff_RHO_0 = 0.0
76 double precision :: cutoff_density = 0.0
77 double precision :: cutoff_density_bar = 0.0
78
79 double precision :: RHO_0 = 0.0
80 double precision :: RHO_ADIM = 0.0
81 double precision :: P_0 = 0.0
82 double precision :: P_0_bar = 0.0
83 double precision :: BARYONIC_DENSITY_0 = 0.0
84 double precision :: BARYONIC_DENSITY_0_bar = 0.0
85 double precision :: ENERGY_DENSITY_0 = 0.0
86

```



```
88     double precision :: scale_radius = 0.0
89     double precision :: scale_mass = 0.0
90     double precision :: K_entropy = 0.0
91     double precision :: log_base_calc_infor_entropy = 2.0D+0
92
93     logical :: verbose_eos
94     logical :: output_summary_only
95     logical :: output_gnuplot_style
96     logical :: verbose_interpolation_coefficients
97     logical :: eos_file_provides_baryonic_density
98
99     integer :: INTERPOLATION_METHOD
100    integer :: UNIT_SYSTEM
101
102    type(EquationOfStateValue), pointer :: first_element
103    type(EquationOfStateValue), pointer :: last_element
104
105    !VARIABLE CREATED FOR PERFORMANCE PURPOSES
106    type(EquationOfStateValue), pointer :: curr_element
107
108 end type ConfigParameters
109
110 type :: CommandLineParameters
111     character(len=32) :: parameter_file
112     double precision :: RHO_0 = 0.0
113 end type CommandLineParameters
114
115 type :: FunctionParameters
116     type(ConfigParameters) :: parameters
117     double precision :: Y(N_DIFF_EQUATIONS)
118     double precision :: V(N_VARIABLES)
119 end type FunctionParameters
120
121 contains
122
123 end module types
```

./programs/tovsolver/src/tovsolver/types.f90

```
2  !
3  ! RAdS Jan12.
4  ! Copyright (C) 2011–2014 by Rodrigo Alvares de Souza.
5  ! Mail: <rsouza01@gmail.com>. Web: "http://www.astro.iag.usp.br/~rsouza/".
6  ! This program may be copied and/or distributed freely. See the
7  ! - terms and conditions in the files in the doc/ subdirectory.
8  !
9  !
10 ! MODULE: util
11 !
12 !> @author
13 !> Rodrigo Souza
14 !
15 ! DESCRIPTION:
16 !> Utility routines
17 !
18 !-----
19 module util
20 use global_constants
21
22     implicit none
23
24     contains
25
26     !> \brief Evaluates the logarithm of 'argument' to the given 'base', calculated as log
27     (x)/log(base).
28     !!
29     !! \param argument
30     !! \param base
31     !! \return the logarithm
32     !!
33     double precision function log_n(argument, base)
34     implicit none
35         double precision :: argument
36         double precision :: base
37
38         log_n = log(argument)/log(base)
39     end function
40
41 end module util
```

./programs/tovsolver/src/tovsolver/util.f90

## D.2 *eos.maxwell.construction*

O programa *eos.maxwell.construction* é um *toolchain* de shell scripts e executáveis, responsável pela geração de uma equação de estado híbrida a partir de duas equações de estado, definidas em um arquivo de configuração. A versão atualizada dos fontes pode ser encontrada no endereço <https://github.com/rsouza01/eos.maxwell.construction>. Nas seções seguintes são listados os fontes dos scripts e da aplicação.

### Programas em Shell

```
1 #!/bin/bash
3 clear
5 ./eos_maxwell_construction.py --config=BJ.MIT.properties.conf > ../workspace/eos/hyb.
  Bethe_Johnson.mit/BF.QCDMIT.B_190.NUC.csv
  ./programs/eos.maxwell.construction/src/eos.maxwell.construction/eos_maxwell_construction.sh
```

### Arquivo de configuração

```
1 [eos_maxwell_construction]
  bin_size=1000
3
5 [EOS_Hadrons]
  eos_file_name=../workspace/eos.sly4/sly4.dat.NUC.csv
7
9 [EOS_Quarks]
  eos_file_name=../workspace/eos.mft.qcd/MFT.QCD.B_70_XI_0.0075.FULL.NUC.csv
  ./programs/eos.maxwell.construction/src/eos.maxwell.construction/properties.conf
```

## Programas em Python

```

1  #!/usr/bin/python
2
3  # eos.maxwell.construction - EoS merger based on the Maxwell Construction
4  # Copyright (C) 2015 Rodrigo Souza <rsouza01@gmail.com>
5
6  # This program is free software; you can redistribute it and/or
7  # modify it under the terms of the GNU General Public License
8  # as published by the Free Software Foundation; either version 2
9  # of the License, or (at your option) any later version.
10
11 # This program is distributed in the hope that it will be useful,
12 # but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
13 # MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
14 # GNU General Public License for more details.
15
16 # You should have received a copy of the GNU General Public License
17 # along with this program; if not, write to the Free Software
18 # Foundation, Inc., 51 Franklin Street, Fifth Floor, Boston, MA
19 # 02110-1301, USA.
20
21
22 import sys
23 import config
24 import eos
25 import os
26 import warnings
27 import string
28 import matplotlib.pyplot as plt
29 import numpy as np
30
31 from scipy.optimize import fsolve
32
33
34 def find_intersection(pressure_hadrons, pressure_quarks, mu_0):
35     """
36     Finds the point where the two functions intersect.
37     Arguments:
38     pressure_hadrons(function) — pressure from mu, hadrons
39     pressure_quarks(function) — pressure from mu, quarks
40     mu_0(float) — initial guess
41
42     """
43
44     # # HADRONS
45     # # 3181.0392079975 -> 2600.8357501993
46     chem_pot = 3181.0392079975
47     # pressure_real = 2600.8357501993
48     # pressure = fHadrons(chem_pot)
49     # print("##### hadron_eos({}) = {}, interp = {}".format(chem_pot,
50     # pressure_real, pressure))
51     #
52     # # QCD
53     # # 6911.94413912 -> 13932.80346
54     chem_pot = 6911.94413912
55     # pressure_real = 13932.80346
56     # pressure = fQuarks(chem_pot)
57     # print("##### quark_eos({}) = {}, interp = {}".format(chem_pot,
58     # pressure_real, pressure))
59     #
60     # chem_pot = mu_0
61     # print("# hadron_eos({}) = {}".format(chem_pot, pressure_hadrons(chem_pot)))
62     # print("# quark_eos({}) = {}".format(chem_pot, pressure_quarks(chem_pot)))
63     # mu_0 = 2700
64
65     return fsolve(lambda mu: pressure_quarks(mu) - pressure_hadrons(mu), mu_0)
66
67
68 def find_range_intersection(range_hadrons, range_quarks):
69     inf_limit = max(range_hadrons.inf_limit, range_quarks.inf_limit)
70     sup_limit = min(range_hadrons.sup_limit, range_quarks.sup_limit)
71
72     return eos.EoSRange(inf_limit, sup_limit)
73
74
75 def main(argv):
76     conf = config.get_cl_parameters(argv)
77     conf = config.get_parameters_from_conf(conf)
78
79     print("#" * 80)
80     print("# config_name = {}".format(conf.config_file))
81     print("# mu_0 = {}".format(conf.mu_0))
82     print("# quarks_eos_file_name = {}".format(conf.quarks_eos_file_name))

```

```

84 print("# hadrons_eos_file_name = {}".format(conf.hadrons_eos_file_name))
86 hadron_eos = eos.EoS(conf.hadrons_eos_file_name, False)
quark_eos = eos.EoS(conf.quarks_eos_file_name, False)

88 range_intersection = find_range_intersection(
90     hadron_eos.pressure_from_chem_potential().get_range(),
quark_eos.pressure_from_chem_potential().get_range())

92 print("#")
93 print("# Range Quarks - P(mu) = {}".format(quark_eos.pressure_from_chem_potential().
94     get_range()))
95 print("# Range Hadrons - P(mu) = {}".format(hadron_eos.pressure_from_chem_potential().
96     get_range()))
97 print("#")

98 print("# Range = {}".format(range_intersection))

100 # warnings.simplefilter("ignore")
102 # TESTE
103 # HADRONS
104 # 3181.0392079975 -> 2600.8357501993
105 # chem_pot = 3181.0392079975
106 # pressure = hadron_eos.pressure_from_chem_potential().get_function()(chem_pot)
107 # print("##### hadron_eos({}) = {}".format(chem_pot, pressure))

108 # QCD
109 # 6911.94413912 -> 13932.80346
110 # chem_pot = 6911.94413912
111 # chem_pot = 6911.94413912
112 # pressure = quark_eos.pressure_from_chem_potential().get_function()(chem_pot)
113 # print("##### quark_eos({}) = {}".format(chem_pot, pressure))

114 # print("##### quark_eos({}) = {}".format(chem_pot, pressure))

116 try:
117     mu_border = find_intersection(hadron_eos.pressure_from_chem_potential().
118     get_function(),
quark_eos.pressure_from_chem_potential().
119     get_function(),
conf.mu_0)
120 except ValueError:
121     print("# Try another initial guess for the chemical potential.")
122     print("#" * 80)
123     sys.exit(-1)

124 pressure_transition_hadron = hadron_eos.pressure_from_chem_potential().get_function()(
mu_border)
125 pressure_transition_quark = quark_eos.pressure_from_chem_potential().get_function()(
mu_border)

126 # print("#")
127 # print("# Transition pressure (hadrons) = {}".format(pressure_transition_hadron))
128 # print("# Transition pressure (quarks) = {}".format(pressure_transition_quark))
129 # print("#")
130 # print("#" * 80)

131 # print("#")
132 # print("#" * 80)

133 # print("# energy density [MeV fm-3], pressure [MeV fm-3], chem_potential [fm-3]")

134 chem_potential_bin = np.linspace(range_intersection.sup_limit-1,
135     range_intersection.inf_limit+1,
136     conf.bin_size)

137 eos_phase = None

138 # print("#")
139 # print("#" * 80)

140 # print("#")
141 # print("#" * 80)

142 for chem_potential in chem_potential_bin:
143     if chem_potential < mu_border:
144         if eos_phase is None or eos_phase == eos.EosPhase.quark:
145             print("#" + 78*"H")
146             print("#" + " BEGINNING OF HADRON PHASE")
147             print("#" + 78*"H")
148             eos_phase = eos.EosPhase.hadron

149 eos_function = hadron_eos.pressure_from_chem_potential().get_function()
150 pressure = eos_function(chem_potential)

151 energy = hadron_eos.energy_from_pressure(pressure)
152 # rho = energy / 2.998e10 ** 2.

153 # print("#")
154 # print("#" * 80)

155 # print("#")
156 # print("#" * 80)

157 else:
158     if eos_phase is None or eos_phase == eos.EosPhase.hadron:
159         print("#" + 78*"Q")
160         print("#" + " BEGINNING OF QUARK PHASE")

```

```
162         print("#" + 78*"Q")
163         eos_phase = eos.EosPhase.quark
164
165         eos_function = quark_eos.pressure_from_chem_potential().get_function()
166         pressure = eos_function(chem_potential)
167         energy = quark_eos.energy_from_pressure(pressure)
168         # rho = energy / 2.998e10 ** 2.
169
170
171     )
172     # print("(mu, epsilon, P) = ({} , {} , {})".format(chem_potential, energy, pressure))
173
174     # CGS
175     # print("{} , {} , {}".format(rho, pressure, chem_potential))
176     # NUC
177     print("{} , {} , {}".format(energy, pressure, chem_potential))
178
179 if __name__ == "__main__":
180     main(sys.argv[1:])
```

./programs/eos.maxwell.construction/src/eos.maxwell.construction/eos\_maxwell\_construction.py

```

2 # eos.maxwell.construction – EoS merger based on the Maxwell Construction
3 # Copyright (C) 2015 Rodrigo Souza <rsouza01@gmail.com>
4
5 # This program is free software; you can redistribute it and/or
6 # modify it under the terms of the GNU General Public License
7 # as published by the Free Software Foundation; either version 2
8 # of the License, or (at your option) any later version.
9
10 # This program is distributed in the hope that it will be useful,
11 # but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
12 # MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
13 # GNU General Public License for more details.
14
15 # You should have received a copy of the GNU General Public License
16 # along with this program; if not, write to the Free Software
17 # Foundation, Inc., 51 Franklin Street, Fifth Floor, Boston, MA
18 # 02110-1301, USA.
19
20 import csv
21 import numpy
22 from enum import Enum
23
24 from collections import namedtuple
25 from scipy import interpolate
26 import cgs_constants as const
27
28 import matplotlib.pyplot as plt
29
30
31 MASS_DENSITY_INDEX = 0
32 PRESSURE_INDEX = 1
33 BARYONIC_NUMBER_INDEX = 2
34 ENERGY_DENSITY_INDEX = 3
35 CHEM_POTENTIAL_INDEX = 3
36
37
38 class EosPhase(Enum):
39     hadron = 1
40     quark = 2
41
42
43 class EoSValue(namedtuple('EoSValue', 'mass_density pressure baryonic_number energy
44     chemical_potential')):
45     """
46     Named tuple that represents an EoS value
47     """
48     pass
49
50 class EoSRange(namedtuple('EoSRange', 'inf_limit sup_limit')):
51     """
52     Named tuple that represents an EoS range
53     """
54     pass
55
56
57 class EoS:
58     def __init__(self, filename, verbose=False):
59
60         self.__filename = filename
61
62         loader = EoSLoader(self.__filename)
63
64         self.__eos = loader.loadEoSFile()
65
66         interp = EoSInterpolation(loader.getEoSList())
67
68         self.__energy_from_pressure_function = \
69             interp.interpolate_spline_energy_from_pressure(plotFit=verbose)
70
71         # TODO: There's something wrong here, it returns a function array instead of a
72         # function.
73         self.__pressure_from_energy_function = \
74             interp.interpolate_spline_pressure_from_energy(plotFit=verbose)
75
76         self.__pressure_from_chem_potential_function = \
77             interp.interpolate_spline_pressure_from_chem_potential(plotFit=verbose)
78
79     def energy_from_pressure(self, pressure):
80         """
81         Returns a function evaluated at 'pressure'.
82         TODO: Upgrade this method to work like pressure_from_chem_potential
83         and return a EoSInterpolationFunction object.
84         Arguments:

```

```

86         pressure(float) — the pressure
87     """
88
89     # print("energy_from_pressure(%f)" % (pressure))
90
91     return self.__energy_from_pressure_function(pressure)
92
93 def pressure_from_energy(self, energy):
94     """
95     Returns a function evaluated at 'energy'
96     TODO: Upgrade this method to work like pressure_from_chem_potential
97     and return a EoSInterpolationFunction object.
98     Arguments:
99     energy(float) — the energy density
100    """
101
102
103    # print("pressure_from_energy(%f)" % (energy))
104
105    return self.__pressure_from_energy_function(energy)
106
107 def pressure_from_chem_potential(self):
108     """
109     Returns a EoSInterpolationFunction object
110     """
111
112    return self.__pressure_from_chem_potential_function
113
114 def pretty_print(self):
115
116    for element in self.__eos:
117
118        print("{}".format(element))
119
120
121 class EoSLoader:
122     """ EoS Loader. """
123
124     def __init__(self, filename):
125
126        self.__eosList = []
127
128        self.__filename = filename
129
130        # print("self.__central_energy_density = {}".format(self.__central_energy_density)
131    )
132
133     def getEoSList(self):
134         return self.__eosList
135
136     def loadEoSFile(self):
137
138        with open(self.__filename, 'r') as f:
139            reader = csv.reader(f)
140            for row in reader:
141                if not row[0].startswith('#'):
142
143                    # CGS
144                    # mass_density = float(row[MASS_DENSITY_INDEX])
145                    # energy = float(row[MASS_DENSITY_INDEX])*const.LIGHT_SPEED**2.
146
147                    # NUCLEAR
148                    mass_density = float(row[MASS_DENSITY_INDEX])/const.LIGHT_SPEED**2.
149                    energy = float(row[MASS_DENSITY_INDEX])
150                    pressure = float(row[PRESSURE_INDEX])
151                    baryonic_number = float(row[BARYONIC_NUMBER_INDEX])
152
153                    # Is there chemical potential in the file?
154
155                    chemical_potential = float(row[CHEM_POTENTIAL_INDEX])
156
157                    # chemical_potential = (energy + pressure)/baryonic_number
158
159                    eos_value = EoSValue(
160                        mass_density=mass_density,
161                        energy=energy,
162                        pressure=pressure,
163                        baryonic_number=baryonic_number,
164                        chemical_potential=chemical_potential)
165
166                    self.__eosList.append(eos_value)
167
168        # print(self.__eosList)
169
170        # firstColumn = [row[0] for row in self.__eosList]

```



```

172     # print(firstColumn)
173     return self.__eosList
174
175 class EoSInterpolationFunction:
176     __INDEX_X = 0
177     __INDEX_Y = 1
178
179     def __init__(self, xy_values, x_name, y_name):
180
181         self.__xy_values = xy_values
182
183         # Checking ranges.
184         self.__inferior_range = self.__xy_values[0][self.__INDEX_X]
185         self.__superior_range = self.__xy_values[len(self.__xy_values)-1][self.__INDEX_X]
186
187         # Must sort the list in order to the interpolation routines work.
188         if self.__inferior_range > self.__superior_range:
189
190             self.__xy_values.sort()
191
192             self.__inferior_range = self.__xy_values[0][self.__INDEX_X]
193             self.__superior_range = self.__xy_values[len(self.__xy_values)-1][self.
194 __INDEX_X]
195
196         self.__function = interpolate.interp1d(
197             zip(*self.__xy_values)[self.__INDEX_X],
198             zip(*self.__xy_values)[self.__INDEX_Y])
199
200         # print("#####")
201
202         # print("self.__inferior_range = {}".format(self.__inferior_range))
203         # print("self.__superior_range = {}".format(self.__superior_range))
204
205         # Sly4
206         # CGS
207         # 5.68218419728234E+036 -> 5.274E+036
208         # chem_pot = 5.68218419728234E+036
209         # NUC
210         # 3181.0392079975 -> 2600.8357501993
211         # chem_pot = 3181.0392079975
212
213         # Mit Bag Model
214         # 9.92699454099264E+035, 4.03658E+035
215         # chem_pot = 9.92699454099264E+035
216
217         # David & Navarra
218         # 6911.94413912 -> 13932.80346
219         # chem_pot = 6911.94413912
220
221         # try:
222         #     print("#####f({}) = {}".format(chem_pot, self.__function(chem_pot)))
223         # except ValueError:
224         #     print("Oops! That was no valid number. Try again...")
225
226
227         # plt.figure()
228         # plt.plot(zip(*self.__xy_values)[self.__INDEX_X],
229                 # self.__function(zip(*self.__xy_values)[self.__INDEX_X]), 'x',
230                 # zip(*self.__xy_values)[self.__INDEX_X], zip(*self.__xy_values)[self.
231 __INDEX_Y])
232         # plt.legend(['True', 'Cubic Spline'])
233         # plt.xlabel(x_name)
234         # plt.ylabel(y_name)
235         # plt.title("\P(mu)")
236         # plt.show()
237         #
238         #
239         # print("#####")
240
241     def get_function(self):
242
243         return self.__function
244
245     def get_range(self):
246         return EoSRange(self.__inferior_range, self.__superior_range)
247
248
249 class EoSInterpolation:
250     """ EoS Interpolation. """
251
252     def __init__(self, eos_list):
253         """
254         EoSInterpolation constructor
255
256

```

```

258     Args:
259     """ eos_list (Two-dimensional list of floats): Values read from file.
260
261     self.__eos_list = eos_list
262
263     self.__energyValues = numpy.asarray(
264         [row.energy for row in self.__eos_list], dtype=numpy.float32)
265
266     self.__pressureValues = numpy.asarray(
267         [row.pressure for row in self.__eos_list], dtype=numpy.float32)
268
269     self.__baryonicNumberValues = numpy.asarray(
270         [row.baryonic_number for row in self.__eos_list], dtype=numpy.float32)
271
272     # self.__chemPotentialValues = numpy.asarray(
273     #     [row.chemical_potential for row in self.__eos_list], dtype=numpy.float32)
274
275     self.__chemPotentialValues = [float(eos_value.chemical_potential) for eos_value in
self.__eos_list]
276
277     # print(self.__chemPotentialValues)
278     # print(self.__energyValues)
279
280 def interpolate_spline_energy_from_pressure(self, plotFit=True):
281
282     fc = interpolate.interp1d(self.__pressureValues[::-1], self.__energyValues[::-1])
283
284     if plotFit:
285         plt.figure()
286         plt.plot(self.__pressureValues,
287                 fc(self.__pressureValues), 'x',
288                 self.__pressureValues, self.__energyValues)
289         plt.legend(['True', 'Cubic Spline'])
290         plt.ylabel("Energy")
291         plt.xlabel("Pressure")
292         plt.title("\epsilon(P)")
293         plt.show()
294         plt.gcf().clear()
295
296     return fc
297
298 def interpolate_spline_pressure_from_chem_potential(self, plotFit=False):
299
300     function = EoSInterpolationFunction(
301         zip(self.__chemPotentialValues,
302            self.__pressureValues), "mu", "P")
303
304     return function
305
306 def interpolate_spline_pressure_from_energy(self, plotFit=False):
307
308     fc = interpolate.interp1d(self.__energyValues[::-1], self.__pressureValues[::-1])
309
310     if plotFit:
311         plt.figure()
312         plt.plot(self.__energyValues,
313                 fc(self.__energyValues), 'o',
314                 self.__energyValues, self.__pressureValues)
315         plt.legend(['True', 'Cubic Spline'])
316         plt.xlabel("Energy")
317         plt.ylabel("Pressure")
318         plt.title("P(e)")
319         plt.show()
320         plt.gcf().clear()
321
322     return fc

```

./programs/eos.maxwell.construction/src/eos.maxwell.construction/eos.py

```

2 # eos.maxwell.construction – EoS merger based on the Maxwell Construction
3 # Copyright (C) 2015 Rodrigo Souza <rsouza01@gmail.com>
4
5 # This program is free software; you can redistribute it and/or
6 # modify it under the terms of the GNU General Public License
7 # as published by the Free Software Foundation; either version 2
8 # of the License, or (at your option) any later version.
9
10 # This program is distributed in the hope that it will be useful,
11 # but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
12 # MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
13 # GNU General Public License for more details.
14
15 # You should have received a copy of the GNU General Public License
16 # along with this program; if not, write to the Free Software
17 # Foundation, Inc., 51 Franklin Street, Fifth Floor, Boston, MA
18 # 02110-1301, USA.
19
20 import sys
21 import getopt
22 import ConfigParser as cp
23 from collections import namedtuple
24
25 class ConfigParameters(namedtuple('ConfigParameters',
26                                 'config_file bin_size hadrons_eos_file_name
27                                 quarks_eos_file_name mu_0')):
28     """
29     Named tuple that represents the parameters in the file tov_solver.conf
30     """
31     pass
32
33 def usage():
34     print(
35         "Usage: \n" +
36         " eos_maxwell_construction.py <--config=config_file_name> \n")
37
38 def config_section_map(config, section):
39     dict1 = {}
40     options = config.options(section)
41
42     for option in options:
43         try:
44             dict1[option] = config.get(section, option)
45         except:
46             print("exception on %s!" % option)
47             dict1[option] = None
48
49     return dict1
50
51 def get_cl_parameters(argv):
52     """
53     Extracts the command line parameters.
54     :param argv:
55     :return:
56     """
57     config_file = "properties.conf"
58     bin_size = 2000
59
60     try:
61         opts, args = getopt.getopt(argv, "hc:", ["help", "config=", "quarks=", "hadrons=",
62         "mu_0="])
63     except getopt.GetoptError as err:
64         print(err)
65         usage()
66         sys.exit(2)
67
68     for opt, arg in opts:
69
70         if opt in ("-c", "--config"):
71             config_file = arg
72
73         elif opt == "--quarks":
74             quarks_eos_file_name = arg
75
76         elif opt == "--hadrons":
77             hadrons_eos_file_name = arg
78
79         elif opt == "--mu_0":
80             mu_0 = float(arg)
81
82         elif opt == '-h':

```

```

86         usage()
87         exit(0)
88     else:
89         print(opt)
90         assert False, "Unhandled exception."
91
92     config = ConfigParameters(config_file, bin_size, hadrons_eos_file_name,
93                               quarks_eos_file_name, mu_0)
94
95     return config
96
97 def get_parameters_from_conf(config):
98     """
99     Read the config file parameters. The precedence is ALWAYS from the command line.
100     :param config: EosConfig object.
101     :return: updated EosConfig object
102     """
103
104     config_parser = cp.ConfigParser()
105     config_parser.read(config.config_file)
106
107     # EOS Parameters
108     if config.hadrons_eos_file_name is None:
109         config.hadrons_eos_file_name = config_section_map(config, "EOS_Hadrons")["
110 eos_file_name"]
111
112     if config.quarks_eos_file_name is None:
113         config.quarks_eos_file_name = config_section_map(config, "EOS_Quarks")["
114 eos_file_name"]
115
116     if config.bin_size is None or config.bin_size < 0:
117         config.bin_size = float(config_section_map(config, "eos.maxwell.construction")["
118 bin_size"])
119
120     if config.mu_0 is None or config.mu_0 < 0:
121         config.mu_0 = float(config_section_map(config, "eos.maxwell.construction")["mu_0"
122 ])
123
124     return config

```

./programs/eos.maxwell.construction/src/eos.maxwell.construction/config.py

```
1 # eos.maxwell.construction - EoS merger based on the Maxwell Construction
2 # Copyright (C) 2015 Rodrigo Souza <rsouza01@gmail.com>
3
4 # This program is free software; you can redistribute it and/or
5 # modify it under the terms of the GNU General Public License
6 # as published by the Free Software Foundation; either version 2
7 # of the License, or (at your option) any later version.
8
9 # This program is distributed in the hope that it will be useful,
10 # but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
11 # MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
12 # GNU General Public License for more details.
13
14 # You should have received a copy of the GNU General Public License
15 # along with this program; if not, write to the Free Software
16 # Foundation, Inc., 51 Franklin Street, Fifth Floor, Boston, MA
17 # 02110-1301, USA.
18
19 LENGTH_TO_KM          = 1e-5
20
21 LIGHT_SPEED           = 2.998e10
22 GRAVITATIONAL_CONSTANT = 6.67259e-8
23
24 PLANCK_CONSTANT_H     = 1
25 PLANCK_CONSTANT_HBAR  = 1
26 BOLTZMANN_CONSTANT    = 1
27
28 SUN_MASS               = 1.9891e33 # grams
29 SUN_RADIUS             = 6.959e10 # cm
30
31 QUARK_UP_MASS         = 5 # MeV
32 QUARK_DOWN_MASS       = 7 # MeV
33 QUARK_STRANGE_MASS    = 150 # MeV
34
35 MEV_TO_ERG            = 1.6021773e-6
36 FM_TO_CM              = 1e-13
37 FM3_TO_CM3           = 1e-39
38
39 ERG_TO_MEV            = 6.24150647996e5
40 CM_TO_FM              = 1e13
41 FM3_TO_CM3           = 1e39
```

./programs/eos.maxwell.construction/src/eos.maxwell.construction/cgs\_constants.py